GRUPO NOVA

ENEM
E VESTIBULARES

Matemática
e suas tecnologias

Não perder o horário da prova!

Curso Online da Resolução das Provas (2013, 2014 e 2015)

www.novaconcursos.com.br

GRUPO NOVA

Matemática

E SUAS TECNOLOGIAS

Índice

CONHECIMENTOS NUMÉRICOS:

Operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem.....01

CONHECIMENTOS GEOMÉTRICOS:

Características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo.....54

CONHECIMENTOS DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE:

Representação e análise de dados; medidas de tendência central (médias, moda e mediana); desvios e variância; noções de probabilidade.....95

CONHECIMENTOS ALGÉBRICOS:

Gráficos e funções; funções algébricas do 1.º e do 2.º graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas. ...102

CONHECIMENTOS ALGÉBRICOS/GEOMÉTRICOS:

Plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações. 165

PROVA COMENTADA 2014

Matemática e suas Tecnologias.....197

Você acaba de ganhar um **Curso Online da Resolução das Provas (2013, 2014 e 2015)**

Para ter acesso ao curso online do Enem, acesse o endereço:

www.novaconcursos.com.br/prova-comentada-enem

GRUPO NOVA

ATENÇÃO

DÚVIDAS DE MATÉRIA

A NOVA APOSTILA oferece aos candidatos um serviço diferenciado - SAC (**Serviço de Apoio ao Candidato**).

O SAC possui o objetivo de auxiliar os candidatos que possuem **dúvidas relacionadas ao conteúdo do edital.**

O candidato que desejar fazer uso do serviço deverá enviar sua dúvida somente através do e-mail: **professores@novaconcursos.com.br**.

Todas as dúvidas serão respondidas pela equipe de professores da Editora Nova, conforme a especialidade da matéria em questão.

Para melhor funcionamento do serviço, solicitamos a especificação da apostila (apostila/concurso/cargo/Estado/matéria/página). **Por exemplo**: Apostila Professor do Estado de São Paulo / Comum à todos os cargos - Disciplina:. Português - paginas 82,86,90.

Havendo dúvidas em diversas matérias, deverá ser encaminhado um e-mail para cada especialidade, podendo demorar em média 10 (dez) dias para retornar. Não retornando nesse prazo, solicitamos o reenvio do mesmo.

ERROS DE IMPRESSÃO

Alguns **erros de edição ou impressão** podem ocorrer durante o processo de fabricação deste volume, caso encontre algo, por favor, entre em contato conosco, pelo nosso e-mail, sac@ **novaconcursos.com.br.**

Alertamos aos candidatos que para ingressar na carreira pública é necessário dedicação, portanto a NOVA APOSTILA auxilia no estudo, mas não garante a sua aprovação. Como também não temos vínculos com a organizadora dos concursos, de forma que inscrições, data de provas, lista de aprovados entre outros independe de nossa equipe.

Havendo a retificação no edital, por favor, entre em contato pelo nosso e-mail, pois a apostila é elaborada com base no primeiro edital do concurso, teremos o COMPROMISSO de enviar gratuitamente a retificação APENAS por e-mail e também disponibilizaremos em nosso site, www.novaconcursos.com.br/, na opção ERRATAS.

Lembramos que nosso maior objetivo é auxiliá-los, portanto nossa equipe está igualmente à disposição para quaisquer dúvidas ou esclarecimentos.

CONTATO COM A EDITORA:

2206-7700 / 0800-7722556

nova@novaapostila.com.br

@novaconcurso

/NOVAConcursosOficial

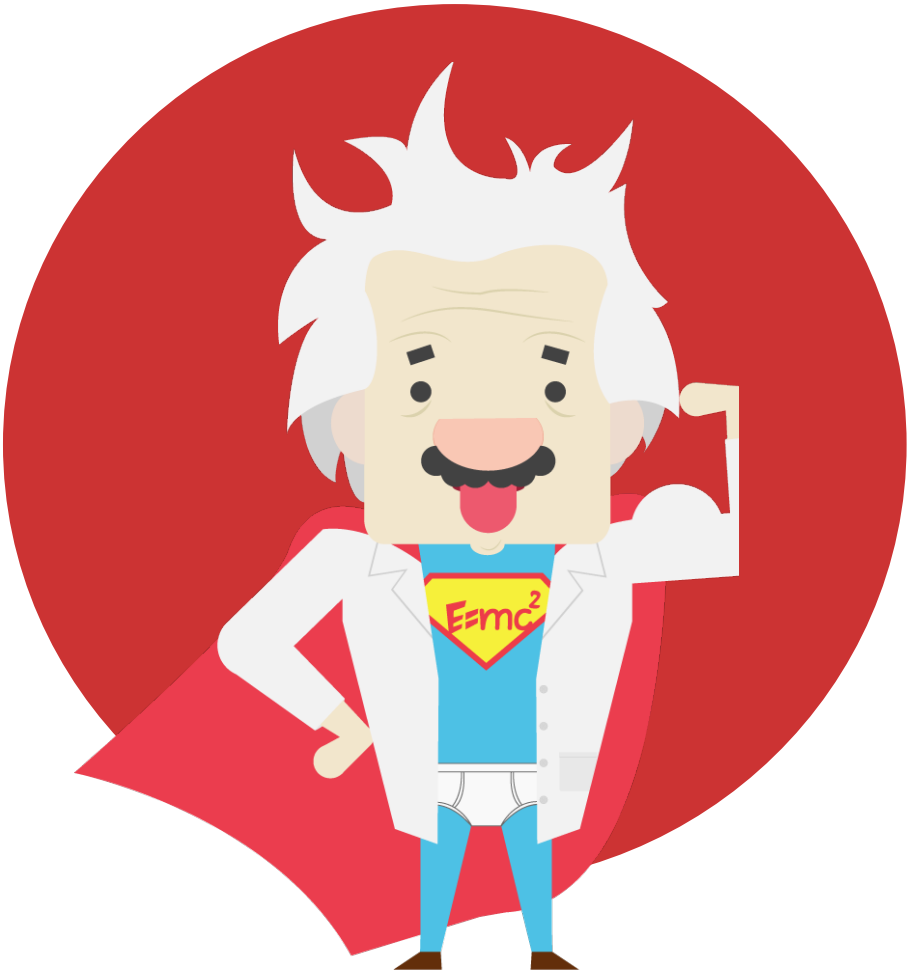
NovaApostila

Atenciosamente,

GRUPO NOVA

Matemática

E SUAS TECNOLOGIAS



Albert Einstein

• CONHECIMENTOS NUMÉRICOS – OPERAÇÕES EM CONJUNTOS NUMÉRICOS (NATURAIS, INTEIROS, RACIONAIS E REAIS), DESIGUALDADES, DIVISIBILIDADE, FATORAÇÃO, RAZÕES E PROPORÇÕES, PORCENTAGEM E JUROS, RELAÇÕES DE DEPENDÊNCIA ENTRE GRANDEZAS, SEQUÊNCIAS E PROGRESSÕES, PRINCÍPIOS DE CONTAGEM.

NÚMEROS NATURAIS

O conjunto dos números naturais é representado pela letra maiúscula *N* e estes números são construídos com os algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, que também são conhecidos como algarismos indo-arábicos. No século VII, os árabes invadiram a Índia, difundindo o seu sistema numérico.

Embora o zero não seja um número natural no sentido que tenha sido proveniente de objetos de contagens naturais, iremos considerá-lo como um número natural uma vez que ele tem as mesmas propriedades algébricas que os números naturais. Na verdade, o zero foi criado pelos hindus na montagem do sistema posicional de numeração para suprir a deficiência de algo nulo.

Na sequência consideraremos que os naturais têm início com o número zero e escreveremos este conjunto como: N = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...}

Representaremos o conjunto dos números naturais com a letra N. As reticências (três pontos) indicam que este conjunto não tem fim. N é um conjunto com infinitos números.

Excluindo o zero do conjunto dos números naturais, o conjunto será representado por: N* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...}

A construção dos Números Naturais

- Todo número natural dado tem um sucessor (número que vem depois do número dado), considerando também o zero.

Exemplos: Seja m um número natural.

a) O sucessor de m é m+1.
b) O sucessor de 0 é 1.
c) O sucessor de 1 é 2.
d) O sucessor de 19 é 20.

- Se um número natural é sucessor de outro, então os dois números juntos são chamados números consecutivos.

Exemplos:

a) 1 e 2 são números consecutivos.
b) 5 e 6 são números consecutivos.
c) 50 e 51 são números consecutivos.

- Vários números formam uma coleção de números naturais consecutivos se o segundo é sucessor do primeiro, o terceiro é sucessor do segundo, o quarto é sucessor do terceiro e assim sucessivamente.

Exemplos:

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 são consecutivos.
b) 5, 6 e 7 são consecutivos.
c) 50, 51, 52 e 53 são consecutivos.

- Todo número natural dado N, exceto o zero, tem um antecessor (número que vem antes do número dado).

Exemplos: Se m é um número natural finito diferente de zero.

a) O antecessor do número m é m-1.
b) O antecessor de 2 é 1.
c) O antecessor de 56 é 55.
d) O antecessor de 10 é 9.

O conjunto abaixo é conhecido como o conjunto dos números naturais pares. Embora uma sequência real seja outro objeto matemático denominado função, algumas vezes utilizaremos a denominação sequência dos números naturais pares para representar o conjunto dos números naturais pares: P = { 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...}

O conjunto abaixo é conhecido como o conjunto dos números naturais ímpares, às vezes também chamados, a sequência dos números ímpares. I = { 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...}

Operações com Números Naturais

Na sequência, estudaremos as duas principais operações possíveis no conjunto dos números naturais. Praticamente, toda a Matemática é construída a partir dessas duas operações: adição e multiplicação.

A adição de números naturais

A primeira operação fundamental da Aritmética tem por finalidade reunir em um só número, todas as unidades de dois ou mais números. Antes de surgir os algarismos indo-arábicos, as adições podiam ser realizadas por meio de tábuas de calcular, com o auxílio de pedras ou por meio de ábacos.

Propriedades da Adição

- Fechamento: A adição no conjunto dos números naturais é fechada, pois a soma de dois números naturais é ainda um número natural. O fato que a operação de adição é fechada em N é conhecido na literatura do assunto como: A adição é uma lei de composição interna no conjunto N.

- Associativa: A adição no conjunto dos números naturais é associativa, pois na adição de três ou mais parcelas de números naturais quaisquer é possível associar as parcelas de quaisquer modos, ou seja, com três números naturais, somando o primeiro com o segundo e ao resultado obtido somarmos um terceiro, obteremos um resultado que é igual à soma do primeiro com a soma do segundo e o terceiro. (A + B) + C = A + (B + C)

- Elemento neutro: No conjunto dos números naturais, existe o elemento neutro que é o zero, pois tomando um número natural qualquer e somando com o elemento neutro (zero), o resultado será o próprio número natural.

- Comutativa: No conjunto dos números naturais, a adição é comutativa, pois a ordem das parcelas não altera a soma, ou seja, somando a primeira parcela com a segunda parcela, teremos o mesmo resultado que se somando a segunda parcela com a primeira parcela.

Multiplicação de Números Naturais

É a operação que tem por finalidade adicionar o primeiro número denominado multiplicando ou parcela, tantas vezes quantas são as unidades do segundo número denominadas multiplicador.

Exemplo

4 vezes 9 é somar o número 9 quatro vezes: 4 x 9 = 9 + 9 + 9 + 9 = 36

O resultado da multiplicação é denominado produto e os números dados que geraram o produto, são chamados fatores. Usamos o sinal × ou · ou x, para representar a multiplicação.

Propriedades da multiplicação

- Fechamento: A multiplicação é fechada no conjunto N dos números naturais, pois realizando o produto de dois ou mais números naturais, o resultado estará em N. O fato que a operação de multiplicação é fechada em N é conhecido na literatura do assunto como: A multiplicação é uma lei de composição interna no conjunto N.

- Associativa: Na multiplicação, podemos associar 3 ou mais fatores de modos diferentes, pois se multiplicarmos o primeiro fator com o segundo e depois multiplicarmos por um terceiro número natural, teremos o mesmo resultado que multiplicar o terceiro pelo produto do primeiro pelo segundo. (m . n) . p = m.(n . p) → (3 . 4) . 5 = 3 . (4 . 5) = 60

- Elemento Neutro: No conjunto dos números naturais existe um elemento neutro para a multiplicação que é o 1. Qualquer que seja o número natural n, tem-se que: 1 . n = n . 1 = n → 1 . 7 = 7 . 1 = 7

- Comutativa: Quando multiplicamos dois números naturais quaisquer, a ordem dos fatores não altera o produto, ou seja, multiplicando o primeiro elemento pelo segundo elemento teremos o mesmo resultado que multiplicando o segundo elemento pelo primeiro elemento. m . n = n . m → 3 . 4 = 4 . 3 = 12

Propriedade Distributiva

Multiplicando um número natural pela soma de dois números naturais, é o mesmo que multiplicar o fator, por cada uma das parcelas e a seguir adicionar os resultados obtidos. m . (p + q) = m . p + m . q → 6 x (5 + 3) = 6 x 5 + 6 x 3 = 30 + 18 = 48

Divisão de Números Naturais

Dados dois números naturais, às vezes necessitamos saber quantas vezes o segundo está contido no primeiro. O primeiro número que é o maior é denominado dividendo e o outro número que é menor é o divisor. O resultado da divisão é chamado quociente. Se multiplicarmos o divisor pelo quociente obteremos o dividendo.

No conjunto dos números naturais, a divisão não é fechada, pois nem sempre é possível dividir um número natural por outro número natural e na ocorrência disto a divisão não é exata.

Relações essenciais numa divisão de números naturais

- Em uma divisão exata de números naturais, o divisor deve ser menor do que o dividendo. 35 : 7 = 5

- Em uma divisão exata de números naturais, o dividendo é o produto do divisor pelo quociente. 35 = 5 x 7

- A divisão de um número natural n por zero não é possível pois, se admitíssemos que o quociente fosse q, então poderíamos escrever: n ÷ 0 = q e isto significaria que: n = 0 x q = 0 o que não é correto! Assim, a divisão de n por 0 não tem sentido ou ainda é dita impossível.

Potenciação de Números Naturais

Para dois números naturais m e n, a expressão m^n é um produto de n fatores iguais ao número m, ou seja: m^n = m . m . m ... m . m → m aparece n vezes

O número que se repete como fator é denominado base que neste caso é m. O número de vezes que a base se repete é denominado expoente que neste caso é n. O resultado é denominado potência.

Esta operação não passa de uma multiplicação com fatores iguais, como por exemplo: $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8 \rightarrow 4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

Propriedades da Potenciação

- Uma potência cuja base é igual a 1 e o expoente natural é n, denotada por 1^n, será sempre igual a 1.

Exemplos:

a- $1^n = 1\times1\times...\times1$ (n vezes) = 1

b- $1^3 = 1\times1\times1 = 1$

c- $1^7 = 1\times1\times1\times1\times1\times1\times1 = 1$

- Se n é um número natural não nulo, então temos que n^o=1. Por exemplo:

- (a) $n^o = 1$
- (b) $5^o = 1$
- (c) $49^o = 1$

- A potência zero elevado a zero, denotada por 0°, é carente de sentido no contexto do Ensino Fundamental.

- Qualquer que seja a potência em que a base é o número natural n e o expoente é igual a 1, denotada por n^1, é igual ao próprio n. Por exemplo:

- (a) $n^1 = n$
- (b) $5^1 = 5$
- (c) $64^1 = 64$

- Toda potência 10^n é o número formado pelo algarismo 1 seguido de n zeros.

Exemplos:

a- $10^3 = 1000$

b- $10^8 = 100.000.000$

c- $10^o = 1$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

QUESTÃO 01

(SABESP – APRENDIZ – FCC/2012) A partir de 1º de março, uma cantina escolar adotou um sistema de recebimento por cartão eletrônico. Esse cartão funciona como uma conta corrente: coloca-se crédito e vão sendo debitados os gastos. É possível o saldo negativo. Enzo toma lanche diariamente na cantina e sua mãe credita valores no cartão todas as semanas. Ao final de março, ele anotou o seu consumo e os pagamentos na seguinte tabela:

	Valor Gasto	Valor Creditado
1ª semana	R$ 27,00	R$ 40,00
2ª semana	R$ 33,00	R$ 30,00
3ª semana	R$ 42,00	R$ 35,00
4ª semana	R$ 25,00	R$ 15,00

No final do mês, Enzo observou que tinha

A) crédito de R$ 7,00.
B) débito de R$ 7,00.
C) crédito de R$ 5,00.
D) débito de R$ 5,00.
E) empatado suas despesas e seus créditos.

QUESTÃO 02

(PREF. IMARUI/SC – AUXILIAR DE SERVIÇOS GERAIS - PREF. IMARUI/2014) José, funcionário público, recebe salário bruto de R$ 2.000,00. Em sua folha de pagamento vem o desconto de R$ 200,00 de INSS e R$ 35,00 de sindicato. Qual o salário líquido de José?

A) R$ 1800,00
B) R$ 1765,00
C) R$ 1675,00
D) R$ 1665,00

QUESTÃO 03

(Professor/Pref.de Itaboraí) O quociente entre dois números naturais é 10. Multiplicando-se o dividendo por cinco e reduzindo-se o divisor à metade, o quociente da nova divisão será:

A) 2
B) 5
C) 25
D) 50
E) 100

QUESTÃO 04

(PREF. ÁGUAS DE CHAPECÓ – OPERADOR DE MÁQUINAS – ALTERNATIVE CONCURSOS) Em uma loja, as compras feitas a prazo podem ser pagas em até 12 vezes sem juros. Se João comprar uma geladeira no valor de R$ 2.100,00 em 12 vezes, pagará uma prestação de:

A) R$ 150,00.
B) R$ 175,00.
C) R$ 200,00.
D) R$ 225,00.

QUESTÃO 05

PREF. JUNDIAI/SP – AGENTE DE SERVIÇOS OPERACIONAIS – MAKIYAMA/2013) Ontem, eu tinha 345 bolinhas de gude em minha coleção. Porém, hoje, participei de um campeonato com meus amigos e perdi 67 bolinhas, mas ganhei outras 90. Sendo assim, qual a quantidade de bolinhas que tenho agora, depois de participar do campeonato?

A) 368
B) 270
C) 365
D) 290
E) 376

QUESTÃO 06

6 – (Pref. Niterói) João e Maria disputaram a prefeitura de uma determinada cidade que possui apenas duas zonas eleitorais. Ao final da sua apuração o Tribunal Regional Eleitoral divulgou a seguinte tabela com os resultados da eleição. A quantidade de eleitores desta cidade é:

	1ª Zona Eleitoral	2ª Zona Eleitoral
João	1750	2245
Maria	850	2320
Nulos	150	217
Brancos	18	25
Abstenções	183	175

A) 3995
B) 7165
C) 7532
D) 7575
E) 7933

QUESTÃO 07

PREF. JUNDIAI/SP – AGENTE DE SERVIÇOS OPERACIONAIS – MAKIYAMA/2013) Durante um mutirão para promover a limpeza de uma cidade, os 15.000 voluntários foram igualmente divididos entre as cinco regiões de tal cidade. Sendo assim, cada região contou com um número de voluntários igual a:

A) 2500
B) 3200
C) 1500
D) 3000
E) 2000

QUESTÃO 08

(PREF. JUNDIAI/SP – AGENTE DE SERVIÇOS OPERACIONAIS – MAKIYAMA/2013) Em determinada loja, o pagamento de um computador pode ser feito sem entrada, em 12 parcelas de R$ 250,00. Sendo assim, um cliente que opte por essa forma de pagamento deverá pagar pelo computador um total de:

A) R$ 2500,00
B) R$ 3000,00
C) R$1900,00
D) R$ 3300,00
E) R$ 2700,00

QUESTÃO 09

(CREFITO/SP – ALMOXARIFE – VUNESP/2012) O sucessor do dobro de determinado número é 23. Esse mesmo determinado número somado a 1 e, depois, dobrado será igual a

A) 24.
B) 22.
C) 20.
D) 18.
E) 16.

QUESTÃO 10

SABESP – ANALISTA DE GESTÃO I -CONTABILIDADE – FCC/2012) Uma montadora de automóveis possui cinco unidades produtivas num mesmo país. No último ano, cada uma dessas unidades produziu 364.098 automóveis. Toda a produção foi igualmente distribuída entre os mercados consumidores de sete países. O número de automóveis que cada país recebeu foi

A) 26.007
B) 26.070
C) 206.070
D) 260.007
E) 260.070

Resoluções

1 - RESPOSTA: "B".

crédito: 40+30+35+15=120
débito: 27+33+42+25=127
120-127=-7
Ele tem um débito de R$ 7,00.

2 - RESPOSTA: "B".

2000-200=1800-35=1765
O salário líquido de José é R$1765,00.

3 - RESPOSTA: "E".
D= dividendo
d= divisor
Q = quociente = 10
R= resto = 0 (divisão exata)
Equacionando:
D= d.Q + R
D= d.10 + 0 ➔ D= 10d
Pela nova divisão temos:

$5D = \frac{d}{2}.Q \quad \rightarrow 5.(10d) = \frac{d}{2}.Q$, isolando Q temos:

$Q = \frac{50d}{\frac{d}{2}} \quad \rightarrow Q = 50d.\frac{2}{d} \quad \rightarrow Q = 50.2 \rightarrow Q =$

4 - RESPOSTA: "B".

$$\frac{2100}{12} = 175$$

Cada prestação será de R$175,00

5 - RESPOSTA: "A".
345-67=278
Depois ganhou 90
278+90=368

6 - RESPOSTA: "E".
Vamos somar a 1ª Zona: 1750+850+150+18+183 = 2951
2ª Zona : 2245+2320+217+25+175 = 4982
Somando os dois: 2951+4982 = 7933

7 - RESPOSTA: "D".

$$\frac{15000}{5} = 3000$$

Cada região terá 3000 voluntários.

8 - RESPOSTA: "B".

$$250 \cdot 12 = 3000$$

O computador custa R$3000,00.

9 - RESPOSTA: "A".
Se o sucessor é 23, o dobro do número é 22, portanto o número é 11.
(11+1)·2=24

10 - RESPOSTA: "E".
364098·5=1820490 automóveis

$$\frac{1820490}{7} = 260070$$

CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS – Z

Definimos o conjunto dos números inteiros como a reunião do conjunto dos números naturais N = {0, 1, 2, 3, 4,..., n,...}, o conjunto dos opostos dos números naturais e o zero. Este conjunto é denotado pela letra Z (Zahlen=número em alemão). Este conjunto pode ser escrito por: Z = {..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}

O conjunto dos números inteiros possui alguns subconjuntos notáveis:

- O conjunto dos números inteiros **não nulos**:
Z* = {..., -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4,...};
Z* = Z – {0}

- O conjunto dos números inteiros **não negativos**:
Z_+ = {0, 1, 2, 3, 4,...}
Z_+ é o próprio conjunto dos números naturais: Z_+ = N

- O conjunto dos números inteiros **positivos**:
Z^*_+ = {1, 2, 3, 4,...}

- O conjunto dos números inteiros **não positivos**:
Z_ = {..., -5, -4, -3, -2, -1, 0}

- O conjunto dos números inteiros **negativos**:
Z*_ = {..., -5, -4, -3, -2, -1}

Módulo: chama-se módulo de um número inteiro a distância ou afastamento desse número até o zero, na reta numérica inteira. Representa-se o módulo por | |.
O módulo de 0 é 0 e indica-se |0| = 0
O módulo de +7 é 7 e indica-se |+7| = 7
O módulo de –9 é 9 e indica-se |–9| = 9
O módulo de qualquer número inteiro, diferente de zero, é sempre positivo.

Números Opostos: Dois números inteiros são ditos opostos um do outro quando apresentam soma zero; assim, os pontos que os representam distam igualmente da origem.
Exemplo: O oposto do número 2 é -2, e o oposto de -2 é 2, pois 2 + (-2) = (-2) + 2 = 0
No geral, dizemos que o oposto, ou simétrico, de *a* é – *a*, e vice-versa; particularmente o oposto de zero é o próprio zero.

Adição de Números Inteiros

Para melhor entendimento desta operação, associaremos aos números inteiros positivos a ideia de ganhar e aos números inteiros negativos a ideia de perder.

Ganhar 5 + ganhar 3 = ganhar 8 (+5) + (+3) = (+8)
Perder 3 + perder 4 = perder 7 (-3) + (-4) = (-7)
Ganhar 8 + perder 5 = ganhar 3 (+8) + (-5) = (+3)
Perder 8 + ganhar 5 = perder 3 (-8) + (+5) = (-3)

O sinal (+) antes do número positivo pode ser dispensado, mas o sinal (–) antes do número negativo nunca pode ser dispensado.

Propriedades da adição de números inteiros: O conjunto Z é fechado para a adição, isto é, a soma de dois números inteiros ainda é um número inteiro.

Associativa: Para todos *a*,*b*,*c* em Z:
a + (b + c) = (a + b) + c
2 + (3 + 7) = (2 + 3) + 7

Comutativa: Para todos *a*,*b* em Z:
a + b = b + a
3 + 7 = 7 + 3

Elemento Neutro: Existe 0 em Z, que adicionado a cada z em Z, proporciona o próprio z, isto é:
z + 0 = z
7 + 0 = 7

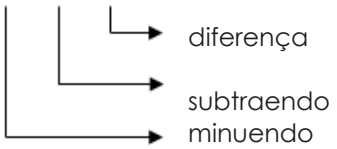
Elemento Oposto: Para todo z em Z, existe (-z) em Z, tal que
z + (–z) = 0
9 + (–9) = 0

Subtração de Números Inteiros

A subtração é empregada quando:
- Precisamos tirar uma quantidade de outra quantidade;
- Temos duas quantidades e queremos saber quanto uma delas tem a mais que a outra;
- Temos duas quantidades e queremos saber quanto falta a uma delas para atingir a outra.

A subtração é a operação inversa da adição.

Observe que: 9 – 5 = 4 4 + 5 = 9



Considere as seguintes situações:
1- Na segunda-feira, a temperatura de Monte Sião passou de +3 graus para +6 graus. Qual foi a variação da temperatura?

Esse fato pode ser representado pela subtração: (+6) – (+3) = +3

2- Na terça-feira, a temperatura de Monte Sião, durante o dia, era de +6 graus. À Noite, a temperatura baixou de 3 graus. Qual a temperatura registrada na noite de terça-feira?
Esse fato pode ser representado pela adição: (+6) + (–3) = +3

Se compararmos as duas igualdades, verificamos que (+6) – (+3) é o mesmo que (+5) + (–3).

Temos:
(+6) – (+3) = (+6) + (–3) = +3
(+3) – (+6) = (+3) + (–6) = –3
(–6) – (–3) = (–6) + (+3) = –3

Daí podemos afirmar: Subtrair dois números inteiros é o mesmo que adicionar o primeiro com o oposto do segundo.

Multiplicação de Números Inteiros

A multiplicação funciona como uma forma simplificada de uma adição quando os números são repetidos. Poderíamos analisar tal situação como o fato de estarmos ganhando repetidamente alguma quantidade, como por exemplo, ganhar 1 objeto por 30 vezes consecutivas, significa ganhar 30 objetos e esta repetição pode ser indicada por um **x**, isto é: 1 + 1 + 1 ... + 1 + 1 = 30 x 1 = 30
Se trocarmos o número 1 pelo número 2, obteremos: 2 + 2 + 2 + ... + 2 + 2 = 30 x 2 = 60
Se trocarmos o número 2 pelo número -2, obteremos: (–2) + (–2) + ... + (–2) = 30 x (-2) = –60
Observamos que a multiplicação é um caso particular da adição onde os valores são repetidos.
Na multiplicação o produto dos números *a* e *b*, pode ser indicado por ***a* x *b***, ***a* . *b*** ou ainda ***ab*** sem nenhum sinal entre as letras.
Para realizar a multiplicação de números inteiros, devemos obedecer à seguinte regra de sinais:
(+1) x (+1) = (+1)
(+1) x (-1) = (-1)
(-1) x (+1) = (-1)
(-1) x (-1) = (+1)

Com o uso das regras acima, podemos concluir que:

Sinais dos números	Resultado do produto
Iguais	Positivo
Diferentes	Negativo

Propriedades da multiplicação de números inteiros: O conjunto Z é fechado para a multiplicação, isto é, a multiplicação de dois números inteiros ainda é um número inteiro.

Associativa: Para todos a,b,c em Z:
a x (b x c) = (a x b) x c
2 x (3 x 7) = (2 x 3) x 7

Comutativa: Para todos a,b em Z:
a x b = b x a
3 x 7 = 7 x 3

Elemento neutro: Existe 1 em Z, que multiplicado por todo z em Z, proporciona o próprio z, isto é:
z x 1 = z
7 x 1 = 7

Elemento inverso: Para todo inteiro z diferente de zero, existe um inverso $z^{-1}=1/z$ em Z, tal que
$z \times z^{-1} = z \times (1/z) = 1$
$9 \times 9^{-1} = 9 \times (1/9) = 1$

Distributiva: Para todos *a,b,c* em Z:
a x (b + c) = (a x b) + (a x c)
3 x (4+5) = (3 x 4) + (3 x 5)

Divisão de Números Inteiros

Dividendo | divisor R quociente Dividendo : divisor = quociente Quociente . divisor = dividendo

Sabemos que na divisão exata dos números naturais:
40 : 5 = 8, pois 5 . 8 = 40
36 : 9 = 4, pois 9 . 4 = 36

Vamos aplicar esses conhecimentos para estudar a divisão exata de números inteiros. Veja o cálculo:
(–20) : (+5) = q ⇨ (+5) . q = (–20) ⇨ q = (–4)
Logo: (–20) : (+5) = +4

Considerando os exemplos dados, concluímos que, para efetuar a divisão exata de um número inteiro por outro número inteiro, diferente de zero, dividimos o módulo do dividendo pelo módulo do divisor. Daí:

- Quando o dividendo e o divisor têm o mesmo sinal, o quociente é um número inteiro positivo.
- Quando o dividendo e o divisor têm sinais diferentes, o quociente é um número inteiro negativo.
- A divisão nem sempre pode ser realizada no conjunto Z. Por exemplo, (+7) : (–2) ou (–19) : (–5) são divisões que não podem ser realizadas em Z, pois o resultado não é um número inteiro.
- No conjunto Z, a divisão não é comutativa, não é associativa e não tem a propriedade da existência do elemento neutro.
- Não existe divisão por zero.

Exemplo: (–15) : 0 não tem significado, pois não existe um número inteiro cujo produto por zero seja igual a –15.

- Zero dividido por qualquer número inteiro, diferente de zero, é zero, pois o produto de qualquer número inteiro por zero é igual a zero.

Exemplos: a) 0 : (–10) = 0 b) 0 : (+6) = 0 c) 0 : (–1) = 0

Potenciação de Números Inteiros

A potência a^n do número inteiro *a*, é definida como um produto de *n* fatores iguais. O número a é denominado a *base* e o número *n* é o *expoente*.
a^n = a x a x a x a x ... x a
a é multiplicado por *an* vezes

Exemplos:
$3^3 = (3) \times (3) \times (3) = 27$
$(-5)^5 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = -3125$
$(-7)^2 = (-7) \times (-7) = 49$
$(+9)^2 = (+9) \times (+9) = 81$

- Toda potência de **base positiva** é um número **inteiro positivo**.

Exemplo: $(+3)^2 = (+3) . (+3) = +9$

- Toda potência de **base negativa** e **expoente par** é um número **inteiro positivo**.

Exemplo: $(-8)^2 = (-8) . (-8) = +64$

- Toda potência de **base negativa** e **expoente ímpar** é um número **inteiro negativo**.

Exemplo: $(-5)^3 = (-5) . (-5) . (-5) = -125$

Propriedades da Potenciação:

Produtos de Potências com bases iguais: Conserva-se a base e somam-se os expoentes. $(-7)^3 . (-7)^6 = (-7)^{3+6} = (-7)^9$

Quocientes de Potências com bases iguais: Conserva-se a base e subtraem-se os expoentes. $(+13)^8 : (+13)^6 = (+13)^{8-6} = (+13)^2$

Potência de Potência: Conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes. $[(+4)^5]^2 = (+4)^{5 \cdot 2} = (+4)^{10}$

Potência de expoente 1: É sempre igual à base. $(+9)^1 = +9$ $(-13)^1 = -13$

Potência de expoente zero e base diferente de zero: É igual a 1.

Exemplo: $(+14)^0 = 1$ $(-35)^0 = 1$

Radiciação de Números Inteiros

A raiz n-ésima (de ordem *n*) de um número inteiro *a* é a operação que resulta em outro número inteiro *não negativob* que elevado à potência *n* fornece o número *a*. O número *n* é o índice da raiz enquanto que o número *a* é o radicando (que fica sob o sinal do radical).

A raiz quadrada (de ordem 2) de um número inteiro *a* é a operação que resulta em outro número inteiro *não negativo* que elevado ao quadrado coincide com o número *a*.

Observação: Não existe a raiz quadrada de um número inteiro negativo no conjunto dos números inteiros.

Erro comum: Frequentemente lemos em materiais didáticos e até mesmo ocorre em algumas aulas aparecimento de:

$\sqrt{9} = \pm 3$

mas isto está errado. O certo é:

$\sqrt{9} = +3$

Observamos que não existe um número inteiro não negativo que multiplicado por ele mesmo resulte em um número negativo.

A raiz cúbica (de ordem 3) de um número inteiro *a* é a operação que resulta em outro número inteiro que elevado ao cubo seja igual ao número *a*. Aqui não restringimos os nossos cálculos somente aos números não negativos.

Exemplos

(a) $\sqrt[3]{8} = 2$, pois $2^3 = 8$.
(b) $\sqrt[3]{-8} = -2$, pois $(-2)^3 = -8$.
(c) $\sqrt[3]{27} = 3$, pois $3^3 = 27$.
(d) $\sqrt[3]{-27} = -3$, pois $(-3)^3 = -27$.

Observação: Ao obedecer à regra dos sinais para o produto de números inteiros, concluímos que:

(a) Se o índice da raiz for par, não existe raiz de número inteiro negativo.

(b) Se o índice da raiz for ímpar, é possível extrair a raiz de qualquer número inteiro.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

QUESTÃO 01

(TRF 2ª – TÉCNICO JUDICIÁRIO – FCC/2012) Uma operação λ é definida por:

$w^{\lambda} = 1 - 6w$, para todo inteiro w.

Com base nessa definição, é correto afirmar que a soma $2^{\lambda} + (1^{\lambda})^{\lambda}$ é igual a

A) −20.
B) −15.
C) −12.
D) 15.
E) 20.

QUESTÃO 02

(UEM/PR – AUXILIAR OPERACIONAL – UEM/2014) Ruth tem somente R$ 2.200,00 e deseja gastar a maior quantidade possível, sem ficar devendo na loja.

Verificou o preço de alguns produtos:

TV: R$ 562,00
DVD: R$ 399,00
Micro-ondas: R$ 429,00
Geladeira: R$ 1.213,00

Na aquisição dos produtos, conforme as condições mencionadas, e pagando a compra em dinheiro, o troco recebido será de:

A) R$ 84,00
B) R$ 74,00
C) R$ 36,00
D) R$ 26,00
E) R$ 16,00

QUESTÃO 03

(PREF. JUNDIAI/SP – ELETRICISTA – MAKIYAMA/2013) Analise as operações a seguir:

I $a^b a^c = a^x$

II $\frac{a^b}{a^c} = a^y$

III $(a^c)^2 = a^z$

De acordo com as propriedades da potenciação, temos que, respectivamente, nas operações I, II e III:

A) x=b-c, y=b+c e z=c/2.
B) x=b+c, y=b-c e z=2c.
C) x=2bc, y=-2bc e z=2c.
D) x=c-b, y=b-c e z=c-2.
E) x=2b, y=2c e z=c+2.

QUESTÃO 04

(BNDES – TÉCNICO ADMINISTRATIVO – CESGRANRIO/2013) Multiplicando-se o maior número inteiro menor do que 8 pelo menor número inteiro maior do que - 8, o resultado encontrado será

A) - 72
B) - 63
C) - 56
D) - 49
E) – 42

QUESTÃO 05

(SEPLAG - POLÍCIA MILITAR/MG - ASSISTENTE ADMINISTRATIVO - FCC/2012) Em um jogo de tabuleiro, Carla e Mateus obtiveram os seguintes resultados:

Carla	
1ª partida	Ganhou 520 pontos
2ª partida	Perdeu 220 pontos
3ª partida	Perdeu 485 pontos
4ª partida	Ganhou 635 pontos

Mateus	
1ª partida	Perdeu 280 pontos
2ª partida	Ganhou 675 pontos
3ª partida	Ganhou 295 pontos
4ª partida	Perdeu 115 pontos

Ao término dessas quatro partidas,

A) Carla perdeu por uma diferença de 150 pontos.
B) Mateus perdeu por uma diferença de 175 pontos.
C) Mateus ganhou por uma diferença de 125 pontos.
D) Carla e Mateus empataram.

QUESTÃO 06

(Operador de máq./Pref.Coronel Fabriciano/MG) Quantos são os valores inteiros e positivos de x para os quais $\frac{x+15}{x+5}$ é um número inteiro?

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

QUESTÃO 07

(CASA DA MOEDA) O quadro abaixo indica o número de passageiros num vôo entre Curitiba e Belém, com duas escalas, uma no Rio de Janeiro e outra em Brasília. Os números indicam a quantidade de passageiros que subiram no avião e os negativos, a quantidade dos que desceram em cada cidade.

Curtiba	+240
Rio de Janeiro	-194 +158
Brasília	-108 +94

O número de passageiros que chegou a Belém foi:
A) 362
B) 280
C) 240
D) 190
E) 135

QUESTÃO 08

(Pref.de Niterói) As variações de temperatura nos desertos são extremas. Supondo que durantes o dia a temperatura seja de 45ºC e à noite seja de -10ºC, a diferença de temperatura entre o dia e noite, em ºC será de :
A) 10
B) 35
C) 45
D) 50
E) 55

QUESTÃO 09

(Pref.de Niterói) Um trabalhador deseja economizar para adquirir a vista uma televisão que custa R$ 420,00. Sabendo que o mesmo consegue economizar R$ 35,00 por mês, o número de meses que ele levará para adquirir a televisão será:
A) 6
B) 8
C) 10
D) 12
E) 15

QUESTÃO 10

(Pref.de Niterói) Um estudante empilhou seus livros, obtendo uma única pilha 52cm de altura. Sabendo que 8 desses livros possui uma espessura de 2cm, e que os livros restantes possuem espessura de 3cm, o número de livros na pilha é:
A) 10
B) 15
C) 18
D) 20
E) 22

RESOLUÇÕES

1 - RESPOSTA:"E".
Pela definição:
Fazendo w=2

$$2^{\lambda} = 1 - 6 \cdot 2 = -11$$
$$1^{\lambda} = 1 - 6 \cdot 1 = -5$$
$$\left(1^{\lambda}\right)^{\lambda} = 1 - 6 \cdot (-5) = 31$$
$$2^{\lambda} + \left(1^{\lambda}\right)^{\lambda} = -11 + 31 = 20$$

2 - RESPOSTA: "D".
Geladeira + Microondas + DVD = 1213+429+399 = 2041
Geladeira + Microondas + TV = 1213+429+562 = 2204, extrapola o orçamento
Geladeira +TV + DVD=1213+562+399=2174, é a maior quantidade gasta possível dentro do orçamento.
Troco:2200-2174=26 reais

3 - RESPOSTA: "B".

I da propriedade das potências, temos:
$a^x = a^{b+c} \Rightarrow x = b + c$

II $a^y = a^{b-c} \Rightarrow y = b - c$

III $a^{2c} = a^z \Rightarrow z = 2c$

4 - RESPOSTA: "D".
Maior inteiro menor que 8 é o 7
Menor inteiro maior que -8 é o -7.
Portanto: 7 · (-7)=-49

5 - RESPOSTA: "C".
Carla: 520-220-485+635=450 pontos
Mateus: -280+675+295-115=575 pontos
Diferença: 575-450=125 pontos

6 - RESPOSTA:"C".
Fazendo substituição dos valores de x, dentro dos conjuntos do inteiros positivos temos:

X = 0 ; $\frac{15}{5} = 3$

X = 1 $\frac{16}{6} = não\ é\ inteiro \quad \therefore \quad x = 2 \quad \frac{17}{7} = não\ é\ inteiro$

$x = 5 \quad \frac{20}{10} = 2$, logo os únicos números que satisfazem a condição é x= 0 e x=5 , dois números apenas.

7 - RESPOSTA:"D".
240- 194 +158 -108 +94 = 190

8- RESPOSTA: "E"
45 – (-10) = 55

9- RESPOSTA: "D"
420 : 35 = 12 meses

10- RESPOSTA: "D"

São 8 livros de 2cm : 8.2 = 16 cm

Como eu tenho 52 cm ao todo e os demais livros tem 3 cm, temos:

52-16 = 36 cm de altura de livros de 3 cm

36: 3 = 12 livros de 3 cm

O total de livros da pilha: 8+12 = 20 livros ao todo.

CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS – Q

Um número racional é o que pode ser escrito na forma $\frac{m}{n}$, onde *m* e *n* são números inteiros, sendo que *n* deve ser diferente de zero. Frequentemente usamos *m/n* para significar a divisão de *m* por *n*.

Como podemos observar, números racionais podem ser obtidos através da razão entre dois números inteiros, razão pela qual, o conjunto de todos os números racionais é denotado por Q. Assim, é comum encontrarmos na literatura a notação:

$Q = \{\frac{m}{n}$ *: m e n em Z, n diferente de zero}*

No conjunto Q destacamos os seguintes subconjuntos:

- Q* = conjunto dos racionais *não nulos*;
- Q_+ = conjunto dos racionais *não negativos*;
- Q^*_+ = conjunto dos racionais *positivos*;
- Q _ = conjunto dos racionais *não positivos*;
- Q*_ = conjunto dos racionais *negativos*.

Representação Decimal das Frações

Tomemos um número racional $\frac{p}{q}$, tal que *p* não seja múltiplo de *q*. Para escrevê-lo na forma decimal, basta efetuar a divisão do numerador pelo denominador.

Nessa divisão podem ocorrer dois casos:

1º) O numeral decimal obtido possui, após a vírgula, um número finito de algarismos. Decimais Exatos:

$\frac{2}{5} = 0{,}4$

$\frac{1}{4} = 0{,}25$

$\frac{35}{4} = 8{,}75$

$\frac{153}{50} = 3{,}06$

2º) O numeral decimal obtido possui, após a vírgula, infinitos algarismos (nem todos nulos), repetindo-se periodicamente. Decimais Periódicos ou Dízimas Periódicas:

$\frac{1}{3} = 0{,}333...$

$\frac{1}{22} = 0{,}04545...$

$\frac{167}{66} = 2{,}53030...$

Representação Fracionária dos Números Decimais

Trata-se do problema inverso: estando o número racional escrito na forma decimal, procuremos escrevê-lo na forma de fração. Temos dois casos:

1º) Transformamos o número em uma fração cujo numerador é o número decimal sem a vírgula e o denominador é composto pelo numeral 1, seguido de tantos zeros quantas forem as casas decimais do número decimal dado:

$0{,}9 = \frac{9}{10}$

$5{,}7 = \frac{57}{10}$

$0{,}76 = \frac{76}{100}$

$3{,}48 = \frac{348}{100}$

$0{,}005 = \frac{5}{1000} = \frac{1}{200}$

2º) Devemos achar a fração geratriz da dízima dada; para tanto, vamos apresentar o procedimento através de alguns exemplos:

Exemplo 1

Seja a dízima 0, 333... .

Façamos x = 0,333... e multipliquemos ambos os membros por 10: 10x = 0,333

Subtraindo, membro a membro, a primeira igualdade da segunda:

10x – x = 3,333... – 0,333... ⇨ 9x = 3 ⇨ x = 3/9

Assim, a geratriz de 0,333... é a fração $\frac{3}{9}$.

Exemplo 2

Seja a dízima 5, 1717... .

Façamos x = 5,1717... e 100x = 517,1717... .
Subtraindo membro a membro, temos:
100x – x = 517,1717... – 5,1717...
99x = 512 ⇨ x = 512/99

Assim, a geratriz de 5,1717... é a fração $\frac{512}{99}$.

Exemplo 3

Seja a dízima 1, 23434...

Façamos x = 1,23434... 10x = 12,3434... 1000x = 1234,34... .
Subtraindo membro a membro, temos:
990x = 1234,34... – 12,34... ⇨ 990x = 1222 ⇨ x = 1222/990

Simplificando, obtemos x = $\frac{611}{495}$, a fração geratriz da dízima 1, 23434...

Módulo ou valor absoluto: É a distância do ponto que representa esse número ao ponto de abscissa zero.

Exemplo: Módulo de $-\frac{3}{2}$ é $\frac{3}{2}$. Indica-se $\left|-\frac{3}{2}\right| = \left|\frac{3}{2}\right|$

Módulo de $+\frac{3}{2}$ é $\frac{3}{2}$. Indica-se $\left|+\frac{3}{2}\right| = \left|\frac{3}{2}\right|$

Números Opostos: Dizemos que $-\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2}$ são números racionais opostos ou simétricos e cada um deles é o oposto do outro. As distâncias dos pontos $-\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2}$ ao ponto zero da reta são iguais.

Soma (Adição) de Números Racionais

Como todo número racional é uma fração ou pode ser escrito na forma de uma fração, definimos a adição entre os números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, da mesma forma que a soma de frações, através de:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Propriedades da Adição de Números Racionais

O conjunto Q é fechado para a operação de adição, isto é, a soma de dois números racionais ainda é um número racional.

- Associativa: Para todos *a*, *b*, *c* em Q: *a + (b + c) = (a + b) + c*

- Comutativa: Para todos a, b em Q: *a + b = b + a*

- Elemento neutro: Existe 0 em Q, que adicionado a todo *q* em Q, proporciona o próprio *q*, isto é: *q + 0 = q*

- Elemento oposto: Para todo q em Q, existe -q em Q, tal que *q + (–q) = 0*

Subtração de Números Racionais

A subtração de dois números racionais *p* e *q* é a própria operação de adição do número *p* com o oposto de *q*, isto é: *p – q = p + (–q)*

Multiplicação (Produto) de Números Racionais

Como todo número racional é uma fração ou pode ser escrito na forma de uma fração, definimos o produto de dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, da mesma forma que o produto de frações, através de:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

O produto dos números racionais *a* e *b* também pode ser indicado por *a × b*, *axb*, *a.b* ou ainda *ab* sem nenhum sinal entre as letras.

Para realizar a multiplicação de números racionais, devemos obedecer à mesma regra de sinais que vale em toda a Matemática:

(+1) × (+1) = (+1)
(+1) × (-1) = (-1)
(-1) × (+1) = (-1)
(-1) × (-1) = (+1)

Podemos assim concluir que o produto de dois números com o mesmo sinal é positivo, mas o produto de dois números com sinais diferentes é negativo.

Propriedades da Multiplicação de Números Racionais

O conjunto Q é fechado para a multiplicação, isto é, o produto de dois números racionais ainda é um número racional.

- Associativa: Para todos a, b, c em Q: *a × (b × c) = (a × b) × c*

- Comutativa: Para todos a, b em Q: *a × b = b × a*

- Elemento neutro: Existe 1 em Q, que multiplicado por todo q em Q, proporciona o próprio q, isto é: $q \times 1 = q$

- Elemento inverso: Para todo $q = \frac{a}{b}$ em Q, q diferente de zero, existe $q^{-1} = \frac{b}{a}$ em Q: $q \times q^{-1} = 1$ $\quad \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$

- Distributiva: Para todos a, b, c em Q: $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

Divisão de Números Racionais

A divisão de dois números racionais *p* e *q* é a própria operação de multiplicação do número *p* pelo inverso de *q*, isto é: $p \div q = p \times q^{-1}$

Potenciação de Números Racionais

A potência q^n do número racional *q* é um produto de *n* fatores iguais. O número *q* é denominado a base e o número *n* é o expoente.

$q^n = q \times q \times q \times q \times \ldots \times q$, (*q* aparece *n* vezes)

Exemplos:

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{8}{125}$

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$

c) $(-5)^2 = (-5) \,.\, (-5) = 25$

d) $(+5)^2 = (+5) \,.\, (+5) = 25$

Propriedades da Potenciação: Toda potência com expoente 0 é igual a 1.

$$\left(+\frac{2}{5}\right)^0 = 1$$

- Toda potência com expoente 1 é igual à própria base.

$$\left(-\frac{9}{4}\right)^1 = -\frac{9}{4}$$

- Toda potência com expoente negativo de um número racional diferente de zero é igual a outra potência que tem a base igual ao inverso da base anterior e o expoente igual ao oposto do expoente anterior.

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

- Toda potência com expoente ímpar tem o mesmo sinal da base.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}$$

- Toda potência com expoente par é um número positivo.

$$\left(-\frac{1}{5}\right)^2 = \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{25}$$

- Produto de potências de mesma base. Para reduzir um produto de potências de mesma base a uma só potência, conservamos a base e somamos os expoentes.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}\right)^{2+3} = \left(\frac{2}{5}\right)^5$$

- Quociente de potências de mesma base. Para reduzir um quociente de potências de mesma base a uma só potência, conservamos a base e subtraímos os expoentes.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^5 : \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{5-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

- Potência de Potência. Para reduzir uma potência de potência a uma potência de um só expoente, conservamos a base e multiplicamos os expoentes.

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2+2+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

Radiciação de Números Racionais

Se um número representa um produto de dois ou mais fatores iguais, então cada fator é chamado raiz do número. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1

4 Representa o produto 2 . 2 ou 2^2. Logo, 2 é a raiz quadrada de 4. Indica-se $\sqrt{4} = 2$.

Exemplo 2

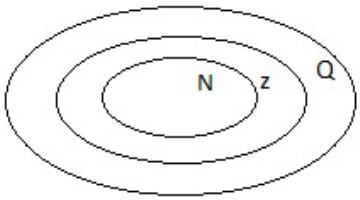
$\frac{1}{9}$ Representa o produto $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$ ou $\left(\frac{1}{3}\right)^2$.Logo, $\frac{1}{3}$ **é a raiz quadrada de** $\frac{1}{9}$.

Indica-se $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$

Exemplo 3

0,216 Representa o produto 0,6 . 0,6 . 0,6 ou $(0,6)^3$. Logo, 0,6 é a raiz cúbica de 0,216. Indica-se $\sqrt[3]{0,216} = 0,6$.

Assim, podemos construir o diagrama:



Um número racional, quando elevado ao quadrado, dá o número zero ou um número racional positivo. Logo, os números racionais negativos não têm raiz quadrada em Q.

O número $-\frac{100}{9}$ **não tem raiz quadrada em Q, pois tanto** $-\frac{10}{3}$ como $+\frac{10}{3}$, quando elevados ao quadrado, dão $\frac{100}{9}$.

Um número racional positivo só tem raiz quadrada no conjunto dos números racionais se ele for um quadrado perfeito.

O número $\frac{2}{3}$ **não tem raiz quadrada em Q, pois não existe número racional que elevado ao quadrado dê** $\frac{2}{3}$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

QUESTÃO 01

(PREF. JUNDIAI/SP – AGENTE DE SERVIÇOS OPERACIONAIS – MAKIYAMA/2013) Na escola onde estudo, ¼ dos alunos tem a língua portuguesa como disciplina favorita, 9/20 têm a matemática como favorita e os demais têm ciências como favorita. Sendo assim, qual fração representa os alunos que têm ciências como disciplina favorita?

A) 1/4
B) 3/10
C) 2/9
D) 4/5
E) 3/2

QUESTÃO 02

(UEM/PR – AUXILIAR OPERACIONAL – UEM/2014) Dirce comprou 7 lapiseiras e pagou R$ 8,30, em cada uma delas. Pagou com uma nota de 100 reais e obteve um desconto de 10 centavos. Quantos reais ela recebeu de troco?

A) R$ 40,00
B) R$ 42,00
C) R$ 44,00
D) R$ 46,00
E) R$ 48,00

QUESTÃO 03

(FUNDAÇÃO CASA – AGENTE DE APOIO OPERACIONAL – VUNESP/2013) De um total de 180 candidatos, 2/5 estudam inglês, 2/9 estudam francês, 1/3estuda espanhol e o restante estuda alemão. O número de candidatos que estuda alemão é:

A) 6.
B) 7.
C) 8.
D) 9.
E) 10.

QUESTÃO 04

(FUNDAÇÃO CASA – AGENTE DE APOIO OPERACIONAL – VUNESP/2013) Em um estado do Sudeste, um Agente de Apoio Operacional tem um salário mensal de: salériobase R$ 617,16 e uma gratificação de R$ 185,15. No mês passado, ele fez 8 horas extras a R$ 8,50 cada hora, mas precisou faltar um dia e foi descontado em R$ 28,40. No mês passado, seu salário totalizou

A) R$ 810,81.
B) R$ 821,31.
C) R$ 838,51.
D) R$ 841,91.
E) R$ 870,31.

QUESTÃO 05

(Pref. Niterói) Simplificando a expressão abaixo

Obtém-se $\dfrac{1{,}3333+\frac{3}{2}}{1{,}5+\frac{4}{3}}$:

A) ½
B) 1
C) 3/2
D) 2
E) 3

QUESTÃO 06

(SABESP – APRENDIZ – FCC/2012) Em um jogo matemático, cada jogador tem direito a 5 cartões marcados com um número, sendo que todos os jogadores recebem os mesmos números. Após todos os jogadores receberem seus cartões, aleatoriamente, realizam uma determinada tarefa que também é sorteada. Vence o jogo quem cumprir a tarefa corretamente. Em uma rodada em que a tarefa era colocar os números marcados nos cartões em ordem crescente, venceu o jogador que apresentou a sequência

$A)\ -4;\ -1;\ \sqrt{16};\ \sqrt{25};\frac{14}{3}$

$B)\ -1;\ -4;\ \sqrt{16};\ \frac{14}{3};\ \sqrt{25}$

$C)\ -1;\ -4;\ \frac{14}{3};\ \sqrt{16};;\ \sqrt{25}$

$D)\ -4;\ -1;\ \sqrt{16};\frac{14}{3};\ \sqrt{25}$

$E)\ -4;\ -1;\ \frac{14}{3};\ \sqrt{16};\sqrt{25}$

QUESTÃO 07

(Prof./Prefeitura de Itaboraí) Se x = 0,181818..., então o valor numérico da expressão:

$$\frac{x+\frac{1}{x}-1}{x+\frac{1}{x}+1}$$

A) 34/39
B) 103/147
C) 104/147
D) 35/49
E) 106/147

QUESTÃO 08

(SABESP – APRENDIZ – FCC/2012) Mariana abriu seu cofrinho com 120 moedas e separou-as:

– 1 real: ¼ das moedas
– 50 centavos: 1/3 das moedas
– 25 centavos: 2/5 das moedas
– 10 centavos: as restantes

Mariana totalizou a quantia contida no cofre em

A) R$ 62,20.
B) R$ 52,20.
C) R$ 50,20.
D) R$ 56,20.
E) R$ 66,20.

QUESTÃO 09

(PM/SE – SOLDADO 3ªCLASSE – FUNCAB/2014) Numa operação policial de rotina, que abordou 800 pessoas, verificou-se que 3/4 dessas pessoas eram homens e 1/5 deles foram detidos. Já entre as mulheres abordadas, 1/8 foram detidas.

Qual o total de pessoas detidas nessa operação policial?

A) 145
B) 185
C) 220
D) 260
E) 120

QUESTÃO 10

(PREF. JUNDIAI/SP – AGENTE DE SERVIÇOS OPERACIONAIS – MAKIYAMA/2013) Quando perguntado sobre qual era a sua idade, o professor de matemática respondeu:

"O produto das frações 9/5 e 75/3 fornece a minha idade!".

Sendo assim, podemos afirmar que o professor tem:

A) 40 anos.
B) 35 anos.
C) 45 anos.
D) 30 anos.
E) 42 anos.

RESOLUÇÕES

1 - RESPOSTA: "B".

Somando português e matemática:

$$\frac{1}{4}+\frac{9}{20}=\frac{5+9}{20}=\frac{14}{20}=\frac{7}{10}$$

O que resta gosta de ciências:

$$1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$$

2 - RESPOSTA: "B".

$$8{,}3\cdot 7=58{,}1$$

Como recebeu um desconto de 10 centavos, Dirce pagou 58 reais

Troco:100-58=42 reais

3 - RESPOSTA: "C".

$$\frac{2}{5}+\frac{2}{9}+\frac{1}{3}$$

Mmc(3,5,9)=45

$$\frac{18+10+15}{45}=\frac{43}{45}$$

O restante estuda alemão: 2/45

$$180\cdot\frac{2}{45}=8$$

4 - RESPOSTA: "D".

salário mensal:617,16+185,15=802,31
horas extras:8,5·8=68
mês passado:802,31+68,00-28,40=841,91
Salário foi R$ 841,91.

5 - RESPOSTA: "B".
1,3333= 12/9 = 4/3
1,5 = 15/10 = 3/2

$$\frac{\frac{4}{3}+\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}=\frac{\frac{17}{6}}{\frac{17}{6}}=1$$

6 - RESPOSTA: "D".

$$\sqrt{16}=4$$

$$\sqrt{25}=5$$

$$\frac{14}{3}=4{,}67$$

A ordem crescente é: $-4;\ -1;\ \sqrt{16};\frac{14}{3};\ \sqrt{25}$

7 - RESPOSTA: "B".

x=0,181818... temos então pela transformação na fração geratriz: 18/99 = 2/11, substituindo:

$$\frac{\frac{2}{11}+\frac{\frac{1}{2}}{11}-1}{\frac{2}{11}+\frac{\frac{1}{2}}{11}+1}=\frac{\frac{2}{11}+\frac{11}{2}-1}{\frac{2}{11}+\frac{11}{2}+1}=\frac{\frac{4+121-22}{22}}{\frac{4+121+22}{22}}=\frac{103}{147}$$

8 - RESPOSTA: "A".

$$1\ real: 120\cdot\frac{1}{4}=30\ moedas$$

$$50\ centavos: \frac{1}{3}\cdot 120=40\ moedas$$

$$25\ centavos: \frac{2}{5}\cdot 120=48\ moedas$$

$$10\ centavos: 120-118\ moedas=2\ moedas$$

$$30+40\cdot 0{,}5+48\cdot 0{,}25+2\cdot 0{,}10=62{,}20$$

Mariana totalizou R$ 62,20.

9 - RESPOSTA: "A".

$$800\cdot\frac{3}{4}=600\ homens$$

$$600\cdot\frac{1}{5}=120\ homens\ detidos$$

Como 3/4 eram homens, 1/4 eram mulheres

$$800\cdot\frac{1}{4}=200\ mulheres$$ ou 800-600=200 mulheres

Total de pessoas detidas: 120+25=145

$$200\cdot\frac{1}{8}=25\ mulhers\ detidas$$

10 - RESPOSTA: "C".

$$\frac{9}{5}\cdot\frac{75}{3}=\frac{675}{15}=45\ anos$$

NÚMEROS IRRACIONAIS

Os números racionais, aqueles que podem ser escritos na forma de uma fração a/b onde a e b são dois números inteiros, com a condição de que b seja diferente de zero, uma vez que sabemos da impossibilidade matemática da divisão por zero.

Vimos também, que todo número racional pode ser escrito na forma de um número decimal periódico, também conhecido como dízima periódica.

Vejam os exemplos de números racionais a seguir:
3 / 4 = 0,75 = 0, 750000...
- 2 / 3 = - 0, 666666...
1 / 3 = 0, 333333...
2 / 1 = 2 = 2, 0000...
4 / 3 = 1, 333333...
- 3 / 2 = - 1,5 = - 1, 50000...
0 = 0, 000...

Existe, entretanto, outra classe de números que não podem ser escritos na forma de fração a/b, conhecidos como números irracionais.

Exemplo

O número real abaixo é um número irracional, embora pareça uma dízima periódica: x = 0,10100100010000100000...

Observe que o número de zeros após o algarismo 1 aumenta a cada passo. Existem infinitos números reais que não são dízimas periódicas e dois números irracionais muito importantes, são:

e = 2,718281828459045...,

Pi () = 3,14159265358979323846264 3...

Que são utilizados nas mais diversas aplicações práticas como: cálculos de áreas, volumes, centros de gravidade, previsão populacional, etc.

Classificação dos Números Irracionais

Existem dois tipos de números irracionais:

- Números reais algébricos irracionais: são raízes de polinômios com coeficientes inteiros. Todo número real que pode ser representado através de uma quantidade finita de somas, subtrações, multiplicações, divisões e raízes de grau inteiro a partir dos números inteiros é um número algébrico, por exemplo, $\sqrt{2}\sqrt[3]{\frac{42}{5}-\sqrt[5]{7}}$.

A recíproca não é verdadeira: existem números algébricos que não podem ser expressos através de radicais, conforme o teorema de Abel-Ruffini.

- Números reais transcendentes: não são raízes de polinômios com coeficientes inteiros. Várias constantes matemáticas são transcendentes, como pi (π) e o número de Euler (e). Pode-se dizer que existem *mais* números transcendentes do que números algébricos (a comparação entre conjuntos infinitos pode ser feita na teoria dos conjuntos).

A definição mais genérica de números algébricos e transcendentes é feita usando-se números complexos.

Identificação de números irracionais

Fundamentado nas explanações anteriores, podemos afirmar que:

- Todas as dízimas periódicas são números racionais.
- Todos os números inteiros são racionais.
- Todas as frações ordinárias são números racionais.
- Todas as dízimas não periódicas são números irracionais.
- Todas as raízes inexatas são números irracionais.
- A soma de um número racional com um número irracional é sempre um número irracional.
- A diferença de dois números irracionais, pode ser um número racional.

Exemplo: $\sqrt{5} - \sqrt{5} = 0$ e 0 é um número racional.

- O quociente de dois números irracionais, pode ser um número racional.

Exemplo: $\sqrt{8} : \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$ e 2 é um número racional.

- O produto de dois números irracionais, pode ser um número racional.

Exemplo: $\sqrt{5} . \sqrt{5} = \sqrt{25} = 5$ e 5 é um número racional.

- A união do conjunto dos números irracionais com o conjunto dos números racionais, resulta num conjunto denominado **conjunto *R* dos números reais**.
- A interseção do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais, não possui elementos comuns e, portanto, é igual ao conjunto vazio ( ).

Simbolicamente, teremos:

Q I = *R*

Q I =

Exercícios resolvidos

QUESTÃO 01

(TRF 2ª – TÉCNICO JUDICIÁRIO – FCC/2012) Considere as seguintes afirmações:

I. Para todo número inteiro x, tem-se

$$\frac{4^{x-1}+4^{x}+4^{x+1}}{4^{x-2}+4^{x-1}} = 16{,}8$$

II. $\left(8^{\frac{1}{3}} + 0{,}4444\ldots\right) : \frac{11}{135} = 30$

III. Efetuando-se $\left(\sqrt[4]{6+2\sqrt{5}}\right) x \left(\sqrt[4]{6-2\sqrt{5}}\right)$ obtém-se um número maior que 5.

Relativamente a essas afirmações, é certo que

A) I,II, e III são verdadeiras.

B) Apenas I e II são verdadeiras.

C) Apenas II e III são verdadeiras.

D) Apenas uma é verdadeira.

E) I,II e III são falsas.

QUESTÃO 02

(DPE/RS – ANALISTA ADMINISTRAÇÃO – FCC/2013)

A soma S é dada por:

$$S = \sqrt{2} + \sqrt{8} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{8} + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{8} + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{8} + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{8}$$

Dessa forma, S é igual a

$A)\ \sqrt{90}$
$B)\ \sqrt{405}$
$C)\ \sqrt{900}$
$D)\ \sqrt{4050}$
$C)\ \sqrt{9000}$

QUESTÃO 03

(CÂMARA DE CANITAR/SP – RECEPCIONISTA – INDEC/2013)O resultado do produto: $(2\sqrt{2}+1)\cdot(\sqrt{2}-1)$ é:

$A)\ \sqrt{2}-1$
B) 2
$C)\ 2\sqrt{2}$
$D)\ 3-\sqrt{2}$

Resoluções

1 - RESPOSTA: "B".

I $\frac{4^x(4^{-1}+1+4)}{4^x(4^{-2}+4^{-1})}$

$$\frac{\frac{1}{4}+5}{\frac{1}{16}+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1+20}{4}}{\frac{1+4}{16}} = \frac{\frac{21}{4}}{\frac{5}{16}} = \frac{21}{4}\cdot\frac{16}{5} = \frac{21\cdot 4}{5} = 16{,}8$$

II $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

10x=4,4444...
-x=0,4444.....
9x=4
x=4/9

$$\left(2+\frac{4}{9}\right):\frac{11}{135} = \frac{18+4}{9}\cdot\frac{135}{11} = \frac{22}{9}\cdot\frac{135}{11} = \frac{2\cdot 135}{9} = 30$$

III $\sqrt[4]{6^2-20} = \sqrt[4]{16} = 2$

Portanto, apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.

2 - RESPOSTA: "D".

$S = 15\sqrt{2} + 15\sqrt{8}$
$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
$S = 15\sqrt{2} + 30\sqrt{2} = 45\sqrt{2}$
$S = \sqrt{45^2}.2$
$S = \sqrt{4050}$

3 - RESPOSTA: "D".

$$(2\sqrt{2}+1)\cdot(\sqrt{2}-1) = 2(\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1$$
$$= 4 - \sqrt{2} - 1 = 3 - \sqrt{2}$$

NÚMEROS REAIS

O conjunto dos **números reais** *R* é uma expansão do conjunto dos números racionais que engloba não só os inteiros e os fracionários, positivos e negativos, mas também todos os números irracionais.

Os números reais são números usados para representar uma quantidade contínua (incluindo o zero e os negativos). Pode-se pensar num número real como uma fração decimal possivelmente infinita, como o número π=3,141592(...). Os números reais têm uma correspondência biunívoca com os pontos de uma reta.

Denomina-se corpo dos números reais a coleção dos elementos pertencentes à conclusão dos racionais, formado pelo corpo de frações associado aos inteiros (números racionais) e a norma associada ao infinito.

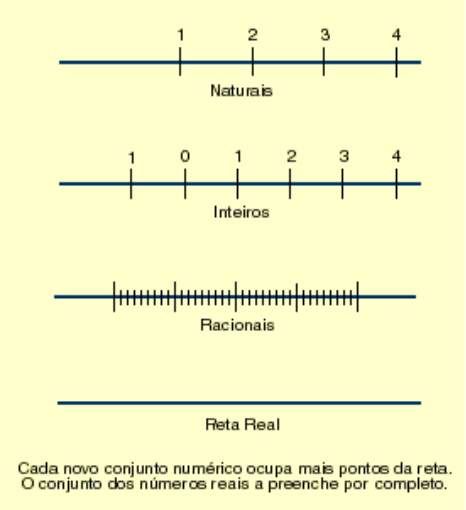
Existem também outras conclusões dos racionais, uma para cada número primo p, chamadas números p-ádicos. O corpo dos números p-ádicos é formado pelos racionais e a norma associada a p!

Propriedade

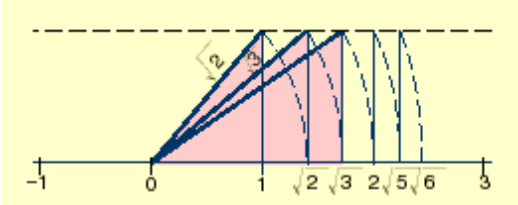
O conjunto dos números reais com as operações binárias de soma e produto e com a relação natural de ordem formam um corpo ordenado. Além das propriedades de um corpo ordenado, *R* tem a seguinte propriedade: Se *R* for dividido em dois conjuntos (uma partição) *A* e *B*, de modo que todo elemento de *A* é menor que todo elemento de *B*, então existe um elemento *x* que *separa* os dois conjuntos, ou seja, *x* é maior ou igual a todo elemento de *A* e menor ou igual a todo elemento de *B*.

$$\forall A,B,(\mathbb{R} = A\cup B \wedge (\forall a\in A, b\in B,(a<b)) \Longrightarrow (\exists x,(\forall a\in A, b\in B \Longrightarrow a\le x\le b))$$

Ao conjunto formado pelos números Irracionais e pelos números Racionais chamamos de conjunto dos números Reais. Ao unirmos o conjunto dos números Irracionais com o conjunto dos números Racionais, formando o conjunto dos números Reais, todas as distâncias representadas por eles sobre uma reta preenchem-na por completo; isto é, ocupam todos os seus pontos. Por isso, essa reta é denominada reta Real.



Podemos concluir que na representação dos números Reais sobre uma reta, dados uma origem e uma unidade, a cada ponto da reta corresponde um número Real e a cada número Real corresponde um ponto na reta.



Ordenação dos números Reais

A representação dos números Reais permite definir uma relação de ordem entre eles. Os números Reais positivos são maiores que zero e os negativos, menores. Expressamos a relação de ordem da seguinte maneira: Dados dois números Reais **a** e **b**,

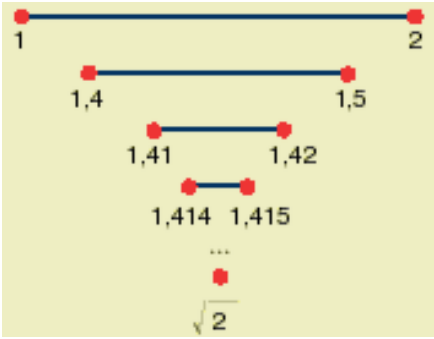
$$a \leq b \leftrightarrow b - a \geq 0$$

Exemplo: $-15 \leq \leftrightarrow 5 - (-15) \geq 0$
$5 + 15 \geq 0$

Propriedades da relação de ordem

- Reflexiva: $a \leq a$
- Transitiva: $a \leq b$ e $b \leq c \rightarrow a \leq c$
- Anti-simétrica: $a \leq b$ e $b \leq a \rightarrow a = b$
- Ordem total: $a < b$ ou $b < a$ ou $a = b$

Expressão aproximada dos números Reais



Os números Irracionais possuem infinitos algarismos decimais não-periódicos. As operações com esta classe de números sempre produzem erros quando não se utilizam todos os algarismos decimais. Por outro lado, é impossível utilizar todos eles nos cálculos. Por isso, somos obrigados a usar aproximações, isto é, cortamos o decimal em algum lugar e desprezamos os algarismos restantes. Os algarismos escolhidos serão uma aproximação do número Real. Observe como tomamos a aproximação de e do número nas tabelas.

	Aproximação por			
	Falta		Excesso	
Erro menor que				
1 unidade	1	3	2	4
1 décimo	1,4	3,1	1,5	3,2
1 centésimo	1,41	3,14	1,42	3,15
1 milésimo	1,414	3,141	1,415	3,142
1 décimo de milésimo	1,4142	3,1415	1,4134	3,1416

Operações com números Reais

Operando com as aproximações, obtemos uma sucessão de intervalos fixos que determinam um número Real. É assim que vamos trabalhar as operações adição, subtração, multiplicação e divisão. Relacionamos, em seguida, uma série de recomendações úteis para operar com números Reais:

- Vamos tomar a aproximação por falta.

- Se quisermos ter uma ideia do erro cometido, escolhemos o mesmo número de casas decimais em ambos os números.

- Se utilizamos uma calculadora, devemos usar a aproximação máxima admitida pela máquina (o maior número de casas decimais).

- Quando operamos com números Reais, devemos fazer constar o erro de aproximação ou o número de casas decimais.

- É importante adquirirmos a idéia de aproximação em função da necessidade. Por exemplo, para desenhar o projeto de uma casa, basta tomar medidas com um erro de centésimo.

- Em geral, para obter uma aproximação de **n** casas decimais, devemos trabalhar com números Reais aproximados, isto é, com **n** + 1 casas decimais.

Para colocar em prática o que foi exposto, vamos fazer as quatro operações indicadas: adição, subtração, multiplicação e divisão com dois números Irracionais.

$\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$
$\sqrt{3} = 1{,}73205\ldots$

Valor Absoluto

Como vimos, o **erro** pode ser:

- Por *excesso*: neste caso, consideramos o erro positivo.

- Por *falta*: neste caso, consideramos o erro negativo.

Quando o erro é dado sem sinal, diz-se que está dado em valor absoluto. O valor absoluto de um número **a** é designado por **|a|** e coincide com o número positivo, se for positivo, e com seu oposto, se for negativo.

Exemplo: Um livro nos custou 8,50 reais. Pagamos com uma nota de 10 reais. Se nos devolve 1,60 real de troco, o vendedor cometeu um erro de +10 centavos. Ao contrário, se nos devolve 1,40 real, o erro cometido é de -10 centavos.

Figura 8	Aproximação	Por excesso	Por falta
Soma de números reais: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1,4143	1,4142
	$\sqrt{3}$	1,7321	1,7320
	$\sqrt{3} + \sqrt{2}$	3,1464	3,1462
	erro máximo	0,0002	0,0002
Subtração de números reais: $\sqrt{3} - \sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1,4143	1,4142
	$\sqrt{3}$	1,7321	1,7320
	$\sqrt{3} - \sqrt{2}$	0,3178	0,3178
	erro máximo	0,0000	0,0000
Multiplicação de números reais: $\sqrt{3} \times \sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1,4143	1,4142
	$\sqrt{3}$	1,7321	1,7320
	$\sqrt{3} \times \sqrt{2}$	2,4497	2,4493
	erro máximo	0,0004	0,0004
Divisão de números reais: $\sqrt{3} \div \sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1,4143	1,4142
	$\sqrt{3}$	1,7321	1,7320
	$\sqrt{3} \div \sqrt{2}$	1,2247	1,2247
	erro máximo	0,0000	0,0000

Exercícios resolvidos

QUESTÃO 01

(SABESP – APRENDIZ – FCC/2012) Um comerciante tem 8 prateleiras em seu empório para organizar os produtos de limpeza. Adquiriu 100 caixas desses produtos com 20 unidades cada uma, sendo que a quantidade total de unidades compradas será distribuída igualmente entre essas prateleiras. Desse modo, cada prateleira receberá um número de unidades, desses produtos, igual a

A) 40
B) 50
C) 100
D) 160
E) 250

QUESTÃO 02

(CÂMARA DE CANITAR/SP – RECEPCIONISTA – INDEC/2013) Em uma banca de revistas existem um total de 870 exemplares dos mais variados temas. Metade das revistas é da editora A, dentre as demais, um terço são publicações antigas. Qual o número de exemplares que não são da Editora A e nem são antigas?

A) 320
B) 290
C) 435
D) 145

QUESTÃO 03

(TRT 6ª – TÉCNICO JUDICIÁRIO- ADMINISTRATIVA – FCC/2012)Em uma praia chamava a atenção um catador de cocos (a água do coco já havia sido retirada). Ele só pegava cocos inteiros e agia da seguinte maneira: o primeiro coco ele coloca inteiro de um lado; o segundo ele dividia ao meio e colocava as metades em outro lado; o terceiro coco ele dividia em três partes iguais e colocava os terços de coco em um terceiro lugar, diferente dos outros lugares; o quarto coco ele dividia em quatro partes iguais e colocava os quartos de coco em um quarto lugar diferente dos outros lugares. No quinto coco agia como se fosse o primeiro coco e colocava inteiro de um lado, o seguinte dividia ao meio, o seguinte em três partes iguais, o seguinte em quatro partes iguais e seguia na sequência: inteiro, meios, três partes iguais, quatro partes iguais. Fez isso com exatamente 59 cocos quando alguém disse ao catador: eu quero três quintos dos seus terços de coco e metade dos seus quartos de coco. O catador consentiu e deu para a pessoa

A) 52 pedaços de coco.
B) 55 pedaços de coco.
C) 59 pedaços de coco.
D) 98 pedaços de coco.
E) 101 pedaços de coco.

QUESTÃO 04

(UEM/PR – AUXILIAR OPERACIONAL – UEM/2014)A mãe do Vitor fez um bolo e repartiu em 24 pedaços, todos de mesmo tamanho. A mãe e o pai comeram juntos, ¼ do bolo. O Vitor e a sua irmã comeram, cada um deles, ¼ do bolo. Quantos pedaços de bolo sobraram?

A) 4
B) 6
C) 8
D) 10
E) 12

QUESTÃO 05

(UEM/PR – AUXILIAR OPERACIONAL – UEM/2014) Paulo recebeu R$1.000,00 de salário. Ele gastou ¼ do salário com aluguel da casa e 3/5 do salário com outras despesas. Do salário que Paulo recebeu, quantos reais ainda restam?

A) R$ 120,00
B) R$ 150,00
C) R$ 180,00
D) R$ 210,00
E) R$ 240,00

QUESTÃO 06

(UFABC/SP – TECNÓLOGO-TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO – VUNESP/2013)Um jardineiro preencheu parcialmente, com água, 3 baldes com capacidade de 15 litros cada um. O primeiro balde foi preenchido com 2/3 de sua capacidade, o segundo com 3/5 da capacidade, e o terceiro, com um volume correspondente à média dos volumes dos outros dois baldes. A soma dos volumes de água nos três baldes, em litros, é

A) 27.
B) 27,5.
C) 28.
D) 28,5.
E) 29.

QUESTÃO 07

(UFOP/MG – ADMINISTRADOR DE EDIFICIOS – UFOP/2013)Uma pessoa caminha 5 minutos em ritmo normal e, em seguida, 2 minutos em ritmo acelerado e, assim, sucessivamente, sempre intercalando os ritmos da caminhada (5 minutos normais e 2 minutos acelerados). A caminhada foi iniciada em ritmo normal, e foi interrompida após 55 minutos do início.

O tempo que essa pessoa caminhou aceleradamente foi:

A) 6 minutos
B) 10 minutos
C) 15 minutos
D) 20 minutos

QUESTÃO 08

(PREF. IMARUÍ – AGENTE EDUCADOR – PREF. IMARUÍ/2014)Sobre o conjunto dos números reais é CORRETO dizer:

A) O conjunto dos números reais reúne somente os números racionais.
B) R* é o conjunto dos números reais não negativos.
C) Sendo A = {-1,0}, os elementos do conjunto A não são números reais.
D) As dízimas não periódicas são números reais.

QUESTÃO 09

(TJ/SP - AUXILIAR DE SAÚDE JUDICIÁRIO - AUXILIAR EM SAÚDE BUCAL – VUNESP/2013)Para numerar as páginas de um livro, uma impressora gasta 0,001 mL por cada algarismo impresso. Por exemplo, para numerar as páginas 7, 58 e 290 gasta-se, respectivamente, 0,001 mL, 0,002 mL e 0,003 mL de tinta. O total de tinta que será gasto para numerar da página 1 até a página 1 000 de um livro, em mL, será

A) 1,111.
B) 2,003.
C) 2,893.
D) 1,003.
E) 2,561.

QUESTÃO 10

(BNDES – TÉCNICO ADMINISTRATIVO – CESGRANRIO/2013) Gilberto levava no bolso três moedas de R$ 0,50, cinco de R$ 0,10 e quatro de R$ 0,25. Gilberto retirou do bolso oito dessas moedas, dando quatro para cada filho.

A diferença entre as quantias recebidas pelos dois filhos de Gilberto é de, no máximo,

A) R$ 0,45
B) R$ 0,90
C) R$ 1,10
D) R$ 1,15
E) R$ 1,35

Resoluções

1 - RESPOSTA: "E".

Total de unidades: 100·20=2000 unidades

$\frac{2000}{8} = 250$ unidades em cada prateleira.

2 - RESPOSTA: "B".

editora A: 870/2=435 revistas
publicações antigas: 435/3=145 revistas

$$435 + 145 = 580$$
$$870 - 580 = 290$$

O número de exemplares que não são da Editora A e nem são antigas são 290.

3 - RESPOSTA: "B".

$$\frac{59}{4} = 14\ resto\ 3$$

14 vezes iguais
Coco inteiro: 14
Metades:14.2=28
Terça parte:14.3=42
Quarta parte:14.4=56
3 cocos: 1 coco inteiro, metade dos cocos, terça parte
Quantidade total
Coco inteiro: 14+1=15
Metades: 28+2=30
Terça parte:42+3=45
Quarta parte :56

$$\frac{3}{5} \cdot 45 + \frac{1}{2} \cdot 56 = 27 + 28 = 55$$

4 - RESPOSTA "B".

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Sobrou 1/4 do bolo.

$$24 \cdot \frac{1}{4} = 6\ pedaços$$

5 - RESPOSTA: "B".

Aluguel: $1000 \cdot \frac{1}{4} = 250$

Outras despesas: $1000 \cdot \frac{3}{5} = 600$

250+600=850
Restam :1000-850=R$150,00

6 - RESPOSTA: "D".

Primeiro balde:

$$\frac{2}{3} \cdot 15 = 10\ litros$$

Segundo balde:

$$\frac{3}{5} \cdot 15 = 9\ litros$$

Terceiro balde:

$$\frac{10 + 9}{2} = 9{,}5\ litros$$

A soma dos volumes é : 10+9+9,5=28,5 litros

7 - RESPOSTA: "C".

A caminhada sempre vai ser 5 minutos e depois 2 minutos, então 7 minutos ao total.

Dividindo o total da caminhada pelo tempo, temos:

$$\frac{55}{7} = 7\ e\ resta\ 6$$

Assim, sabemos que a pessoa caminhou 7. (5 minutos +2 minutos) +6 minutos (5 minutos+1 minuto)

Aceleradamente caminhou: (7.2)+1 ➔ 14+1=15 minutos

8 - RESPOSTA: "D".

A) errada - O conjunto dos números reais tem os conjuntos: naturais, inteiros, racionais e irracionais.

B) errada – R* são os reais sem o zero.

C) errada - -1 e 0 são números reais.

9 - RESPOSTA: "C".

1 a 9 =9 algarismos=0,001 · 9=0,009 ml

De 10 a 99, temos que saber quantos números tem.

99-10+1=90.

OBS: soma 1, pois quanto subtraímos exclui-se o primeiro número.

90 números de 2 algarismos: 0,002 · 90=0,18ml

De 100 a 999

999-100+1=900 números

900 · 0,003=2,7ml

1000=0,004ml

Somando: 0,009+0,18+2,7+0,004=2,893

10 - RESPOSTA: "E".

Supondo que as quatro primeiras moedas sejam as 3 de R$ 0,50 e 1 de R$ 0,25(maiores valores).

Um filho receberia : 1,50+0,25=R$1,75

E as ouras quatro moedas sejam de menor valor: 4 de R$ 0,10=R$ 0,40.

A maior diferença seria de 1,75-0,40=1,35

Dica: sempre que fala a maior diferença tem que o maior valor possível – o menor valor.

RAZÃO

Sejam dois números reais *a* e *b*, com $b \neq 0$. Chama-se razão entre *a* e *b* (nessa ordem) o quociente a b, ou $\frac{a}{b}$.

A razão é representada por um número racional, mas é lida de modo diferente.

Exemplos

a) A fração $\frac{3}{5}$ lê-se: "três quintos".

b) A razão $\frac{3}{5}$ lê-se: "3 para 5".

Os termos da razão recebem nomes especiais.

a) Na fração $\frac{3}{5}$ → O número 3 é **numerador**; → O número 5 é **denominador**

b) Na razão $\frac{3}{5}$ → O número 3 é **antecedente**; → O número 5 é **consequente**

Exemplo 1

A razão entre 20 e 50 é $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$; já a razão entre 50 e 20 é $\frac{50}{20} = \frac{5}{2}$.

Exemplo 2

Numa classe de 42 alunos há 18 rapazes e 24 moças. A razão entre o número de rapazes e o número de moças é $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$, o que significa que para "cada 3 rapazes há 4 moças". Por outro lado, a razão entre o número de rapazes e o total de alunos é dada por $\frac{18}{42} = \frac{3}{7}$, o que equivale a dizer que "de cada 7 alunos na classe, 3 são rapazes".

Razão entre grandezas de mesma espécie

A razão entre duas grandezas de mesma espécie é o quociente dos números que expressam as medidas dessas grandezas numa mesma unidade.

Exemplo

Uma sala tem 18 m². Um tapete que ocupar o centro dessa sala mede 384 dm². Vamos calcular a razão entre a área do tapete e a área da sala.

Primeiro, devemos transformar as duas grandezas em uma mesma unidade:

Área da sala: 18 m² = 1 800 dm²

Área do tapete: 384 dm²

Estando as duas áreas na mesma unidade, podemos escrever a razão:

$$\frac{384dm^2}{1800dm^2} = \frac{384}{1800} = \frac{16}{75}$$

Razão entre grandezas de espécies diferentes

Exemplo 1

Considere um carro que às 9 horas passa pelo quilômetro 30 de uma estrada e, às 11 horas, pelo quilômetro 170.

Distância percorrida: 170 km – 30 km = 140 km
Tempo gasto: 11h – 9h = 2h

Calculamos a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto para isso:

$$\frac{140km}{2h} = 70km/h$$

A esse tipo de razão dá-se o nome de **velocidade média**.

Observe que:
- as grandezas "quilômetro e hora" são de naturezas diferentes;
- a notação km/h (lê-se: "quilômetros por hora") deve acompanhar a razão.

Exemplo 2

A Região Sudeste (Espírito Santo, Minas Gerais, Rio de Janeiro e São Paulo) tem uma área aproximada de 927 286 km² e uma população de 66 288 000 habitantes, aproximadamente, segundo estimativas projetadas pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) para o ano de 1995.

Dividindo-se o número de habitantes pela área, obteremos o número de habitantes por km² (hab./km²):

$$\frac{66288000}{927286} \cong 71{,}5hab./km^2$$

A esse tipo de razão dá-se o nome de **densidade demográfica**.

A notação hab./km² (lê-se: "habitantes por quilômetro quadrado") deve acompanhar a razão.

Exemplo 3

Um carro percorreu, na cidade, 83,76 km com 8 L de gasolina. Dividindo-se o número de quilômetros percorridos pelo número de litros de combustível consumidos, teremos o número de quilômetros que esse carro percorre com um litro de gasolina:

$$\frac{83{,}76km}{8l} \cong 10{,}47km/l$$

A esse tipo de razão dá-se o nome de **consumo médio**.
A notação km/l (lê-se: "quilômetro por litro") deve acompanhar a razão.

Exemplo 4

Uma sala tem 8 m de comprimento. Esse comprimento é representado num desenho por 20 cm. Qual é a escala do desenho?

Escala =

$$\frac{comprimentonodesenho}{comprimentoreal} = \frac{20cm}{8m} = \frac{20cm}{800cm} = \frac{1}{40} ou 1:40$$

A razão entre um comprimento no desenho e o correspondente comprimento real, chama-se **Escala.**

PROPORÇÃO

A igualdade entre duas razões recebe o nome de **proporção**.

Na proporção $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ (lê-se: "3 está para 5 assim como 6 está para 10"), os números 3 e 10 são chamados extremos, e os números 5 e 6 são chamados meios. Observemos que o produto 3 x 10 = 30 é igual ao produto 5 x 6 = 30, o que caracteriza a propriedade fundamental das proporções:

"Em toda proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos".

Exemplo 1

Na proporção $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, temos 2 x 9 = 3 x 6 = 18;

e em $\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$, temos 4 x 4 = 1 x 16 = 16.

Exemplo 2

Na bula de um remédio pediátrico recomenda-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg do "peso" da criança.
Se uma criança tem 12 kg, a dosagem correta x é dada por:

$$\frac{5gotas}{2kg} = \frac{x}{12kg} \quad \rightarrow \quad x = 30 \text{ gotas}$$

Por outro lado, se soubermos que foram corretamente ministradas 20 gotas a uma criança, podemos concluir que seu "peso" é 8 kg, pois:

$$\frac{5gotas}{2kg} = 20gotas/p \quad \rightarrow \quad p = 8kg$$

(nota: o procedimento utilizado nesse exemplo é comumente chamado de regra de três simples.)

Propriedades da Proporção

O produto dos extremos é igual ao produto dos meios: essa propriedade possibilita reconhecer quando duas razões formam ou não uma proporção.

$\frac{4}{3} e \frac{12}{9}$ formam uma proporção, pois

Produto dos extremos $\longleftarrow \underbrace{4.9}_{36} = \underbrace{3.12}_{36} \longrightarrow$ Produto dos meios

A soma dos dois primeiros termos está para o primeiro (ou para o segundo termo) assim como a soma dos dois últimos está para o terceiro (ou para o quarto termo).

$$\frac{5}{2} = \frac{10}{4} \Rightarrow \left\{ \frac{5+2}{5} = \frac{10+4}{10} \Rightarrow \frac{7}{5} = \frac{14}{10} \right.$$

ou

$$\frac{5}{2} = \frac{10}{4} \Rightarrow \left\{ \frac{5+2}{2} = \frac{10+4}{4} \Rightarrow \frac{7}{2} = \frac{14}{4} \right.$$

A diferença entre os dois primeiros termos está para o primeiro (ou para o segundo termo) assim como a diferença entre os dois últimos está para o terceiro (ou para o quarto termo).

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6} \Rightarrow \left\{ \frac{4-3}{4} = \frac{8-6}{8} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{2}{8} \right.$$

ou

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6} \Rightarrow \left\{ \frac{4-3}{3} = \frac{8-6}{6} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2}{6} \right.$$

A soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes assim como cada antecedente está para o seu consequente.

$$\frac{12}{8} = \frac{3}{2} \Rightarrow \left\{ \frac{12+3}{8+2} = \frac{12}{8} \Rightarrow \frac{15}{10} = \frac{12}{8} \right.$$

ou

$$\frac{12}{8} = \frac{3}{2} \Rightarrow \left\{ \frac{12+3}{8+2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{15}{10} = \frac{3}{2} \right.$$

A diferença dos antecedentes está para a diferença dos consequentes assim como cada antecedente está para o seu consequente.

$$\frac{3}{15}=\frac{1}{5}\Rightarrow\left\{\frac{3-1}{15-5}=\frac{3}{15}\Rightarrow\frac{2}{10}=\frac{3}{15}\right.$$

ou

$$\frac{3}{15}=\frac{1}{5}\Rightarrow\left\{\frac{3-1}{15-5}=\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{2}{10}=\frac{1}{5}\right.$$

Exercícios resolvidos

QUESTÃO 01

Em um mapa verifica-se que a escala é 1 : 22 000 000. Duas cidades estão distantes de São Paulo, respectivamente, 4 e 6 cm. Se fosse feita uma estrada ligando as três cidades, qual seria o mínimo de extensão que ela teria?

QUESTÃO 02

Em um mapa, a distância em linha reta entre Brasília e Palmas, no Tocantins é de 10 cm. Sabendo que a distância real entre as duas cidades é de 700 km, qual a escala utilizada na confecção do mapa?

QUESTÃO 03

Uma estátua de bronze tem 140 kg de massa e seu volume é de 16 dm³. Qual é a sua densidade?

QUESTÃO 04

Um trem percorreu 453 km em 6 horas. Qual a velocidade média do trem nesse percurso?

QUESTÃO 05

O estado de Tocantins ocupada uma área aproximada de 278 500 km². De acordo com o Censo/2000 o Tocantins tinha uma população de aproximadamente 1 156 000 habitantes. Qual é a densidade demográfica do estado de Tocantins?

QUESTÃO 06

A diferença entre a idade de Ângela e a idade de Vera é 12 anos. Sabendo-se que suas idades estão uma para a outra assim como $\frac{5}{2}$, determine a idade de cada uma.

QUESTÃO 07

Um segmento de 78 cm de comprimento é dividido em duas partes na razão de $\frac{4}{9}$. Determine o comprimento de cada uma das partes.

QUESTÃO 08

Sabe-se que as casas do braço de um violão diminuem de largura seguindo uma mesma proporção. Se a primeira casa do braço de um violão tem 4 cm de largura e a segunda casa, 3 cm, calcule a largura da quarta casa.

QUESTÃO 09

Água e tinta estão misturadas na razão de 9 para 5. Sabendo-se que há 81 litros de água na mistura, o volume total em litros é de:

a) 45
b) 81
c) 85
d) 181
e) 126

QUESTÃO 10

A diferença entre dois números é 65. Sabe-se que o primeiro está para 9 assim como o segundo está para 4. Calcule esses números.

Resoluções

1) Resposta "1320 km".

Solução: 1cm (no mapa) = 22.000.000cm (na realidade)

SP ---------- cidade A ---------- cidade B
4cm 6cm

O mínimo de extensão será a da cidade mais longe (6cm)

22.000.000 x 6 = 132.000.000 cm = 1320 km.

Logo, o mínimo de extensão que ela teria corresponde à 1320 km.

2) Resposta "1: 7 000 000".

Solução: Dados:

Comprimento do desenho: 10 cm

Comprimento no real: 700 km = (700 . 100 000) cm = 70 000 000 cm

$$escala=\frac{comprimento\ do\ desenho}{comprimento\ real}=\frac{10}{70\,000\,000}=$$

$$\frac{1}{7\,000\,000}\ ou\ 1:7\,000\,000$$

A escala de 1: 7 000 000 significa que:

- 1 cm no desenho corresponde a 7 000 000 cm no real;
- 1 cm no desenho corresponde a 70 000 m no real;
- 1 cm no desenho corresponde a 70 km no real.

3) Resposta "8,75 kg/dm³".

Solução: De acordo com os dados do problema, temos:

$$densidade = \frac{140\ kg}{16\ dm^3} = 8{,}75\ kg/dm^3$$

Logo, a densidade da estátua é de 8,75 kg/dm³, que lemos como: 8,75 quilogramas por decímetro cúbico.

4) Resposta "75,5 km/h".

Solução: De acordo com que o enunciado nos oferece, temos:

$$velocidade\ média = \frac{453\ km}{6\ h} = 75{,}5\ km/h$$

Logo, a velocidade média do trem, nesse percurso, foi de 75,5 km/h, que lemos: 75,5 quilômetros por hora.

5) Resposta "4,15 hab./km²

Solução: O problema nos oferece os seguintes dados:

$$A\ densidade\ demográfica = \frac{1\ 156\ 000\ hab.}{278\ 500\ km^2} = 4{,}15\ hab./km^2$$

6) Resposta "Ângela 20; Vera 8".

Solução:

$$\frac{A}{V} = \frac{5}{2} \rightarrow \frac{12+V}{V} = \frac{5}{2}$$

A – V = 12 anos
A = 12 + V
2 (12+V) = 5V
24 + 2V = 5V
5V – 2V = 24
3V = 24

$V = \frac{24}{3}$

V (Vera) = 8
A – 8 = 12
A = 12 + 8
A (Ângela) = 20

7) Resposta "24 cm; 54 cm".

Solução:
x + y = 78 cm
x = 78 - y

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{9} \rightarrow \frac{78-y}{y} = \frac{4}{9}$$

9 (78 - y) = 4y
702 – 9y = 4y
702 = 4y + 9y
13y = 702
y =
y = 54cm

x + 54 = 78
x = 78 - 54
x = 24 cm

8) Resposta " $\frac{27}{16}\ cm$ ".

Solução: Caso a proporção entre a 2ª e a 1ª casa se mantenha constante nas demais, é só determinar qual é esta proporção existente entre elas: no caso, = 0,75, ou seja, a largura da 2ª casa é 75% a largura da 1ª; Portanto a largura da 3ª casa é (3 . 0,75) = 2,25 cm.

Logo, a largura da 4ª casa é de (2,25 . 0,75) = 1,69 cm.

Portanto a sequência seria: (4...3...$\frac{9}{4}$...$\frac{27}{16}$...) e assim por diante.

Onde a razão de proporção é $\frac{3}{4}$ ... e pode ser representada pela expressão:

T_i . P elevado à (n - 1)

Onde:

T_i = termo inicial, neste caso: 4

P = proporção entre T_i e o seguinte (razão), neste caso: $\frac{3}{4}$

n = número sequencial do termo que se busca, neste caso: 4

Teremos:

(T_i = 4; P = ; n – 1 = 3)

$4 . \frac{3^3}{4} = \frac{27}{16}$

9) Resposta "E".
Solução:
A = 81 litros

$$\frac{A}{T} = \frac{9}{5} \rightarrow \frac{81}{T} = \frac{9}{5}$$

9T = 405

$$T = \frac{405}{9}$$

T = 45

A + T = ?
81 + 45 = 126 litros

10) Resposta "117 e 52".
Solução:
x – y = 65
x = 65 + y

$$\frac{x}{y} = \frac{9}{4} \rightarrow \frac{65 + y}{y} = \frac{9}{4}$$

9y = 4 (65 + y)
9y = 260 + 4y
9y – 4y = 260
5y = 260

$$y = \frac{260}{5}$$

y = 52

x – 52 = 65
x = 65 + 52
x = 117

PORCENTAGEM

É uma fração de denominador centesimal, ou seja, é uma fração de denominador 100. Representamos porcentagem pelo símbolo % e lê-se: "por cento".

Deste modo, a fração $\frac{50}{100}$ é uma porcentagem que podemos representar por 50%.

Forma Decimal: É comum representarmos uma porcentagem na forma decimal, por exemplo, 35% na forma decimal seriam representados por 0,35.

$$75\% = \frac{75}{100} = 0{,}75$$

Cálculo de uma Porcentagem: Para calcularmos uma porcentagem *p*% de *V*, basta multiplicarmos a fração $\frac{p}{100}$ por *V*.

$$P\% \text{ de } V = \frac{p}{100} . V$$

Exemplo 1

$$23\% \text{ de } 240 = \frac{23}{100} . 240 = 55{,}2$$

Exemplo 2

Em uma pesquisa de mercado, constatou-se que 67% de uma amostra assistem a um certo programa de TV. Se a população é de 56.000 habitantes, quantas pessoas assistem ao tal programa?

Resolução: 67% de 56 000 = $\frac{67}{100}.56000 = 37520$

Resposta: 37 520 pessoas.

Porcentagem que o lucro representa em relação ao preço de custo e em relação ao preço de venda

Chamamos de lucro em uma transação comercial de compra e venda a diferença entre o preço de venda e o preço de custo.
Lucro = preço de venda – preço de custo

Caso essa diferença seja negativa, ela será chamada de **prejuízo**.
Assim, podemos escrever:
Preço de custo + lucro = preço de venda
Preço de custo – prejuízos = preço de venda

Podemos expressar o lucro na forma de porcentagem de duas formas:
Lucro sobre o custo = lucro/preço de custo. 100%
Lucro sobre a venda = lucro/preço de venda. 100%

Observação: A mesma análise pode ser feita para o caso de prejuízo.

Exemplo

Uma mercadoria foi comprada por R$ 500,00 e vendida por R$ 800,00.
Pede-se:
- o lucro obtido na transação;
- a porcentagem de lucro sobre o preço de custo;
- a porcentagem de lucro sobre o preço de venda.

Resposta:
Lucro = 800 – 500 = R$ 300,00

$L_c = \frac{300}{500} = 0{,}60 = 60\%$

$L_v = \frac{300}{800} = 0{,}375 = 37{,}5\%$

Aumento

Aumento Percentual: Consideremos um valor inicial *V* que deve sofrer um aumento de p% de seu valor. Chamemos de *A* o valor do aumento e V_A o valor após o aumento. Então, A = p% de V = $\frac{p}{100}$. V

$V_A = V + A = V + \frac{p}{100} . V$

$V_A = (1 + \frac{p}{100}) . V$

Em que $(1 + \frac{p}{100})$ é o fator de aumento.

Desconto

Desconto Percentual: Consideremos um valor inicial *V* que deve sofrer um desconto de p% de seu valor. Chamemos de *D* o valor do desconto e V_D o valor após o desconto. Então, D = p% de V = $\frac{p}{100}$. V

$V_D = V - D = V - \frac{p}{100} . V$

$V_D = (1 - \frac{p}{100}) . V$

Em que $(1 - \frac{p}{100})$ é o fator de desconto.

Exemplo

Uma empresa admite um funcionário no mês de janeiro sabendo que, já em março, ele terá 40% de aumento. Se a empresa deseja que o salário desse funcionário, a partir de março, seja R$ 3 500,00, com que salário deve admiti-lo?

Resolução: $V_A = 1{,}4 . V$

$3\,500 = 1{,}4 . V$

$V = \frac{3500}{1{,}4} = 2500$

Resposta: R$ 2 500,00

Aumentos e Descontos Sucessivos: Consideremos um valor inicial *V*, e vamos considerar que ele irá sofrer dois aumentos sucessivos de p_1% e p_2%. Sendo V_1 o valor após o primeiro aumento, temos:

$V_1 = V . (1 + \frac{p_1}{100})$

Sendo V_2 o valor após o segundo aumento, temos:

$V_2 = V_1 . (1 + \frac{p_2}{100})$

$V_2 = V . (1 + \frac{p_1}{100}) . (1 + \frac{p_2}{100})$

Sendo *V* um valor inicial, vamos considerar que ele irá sofrer dois descontos sucessivos de p_1% e p_2%.

Sendo V_1 o valor após o primeiro desconto, temos:

$V_1 = V. (1 - \frac{p_1}{100})$

Sendo V_2 o valor após o segundo desconto, temos:

$V_2 = V_1 . (1 - \frac{p_2}{100})$

$V_2 = V . (1 - \frac{p_1}{100}) . (1 - \frac{p_2}{100})$

Sendo *V* um valor inicial, vamos considerar que ele irá sofrer um aumento de p_1% e, sucessivamente, um desconto de p_2%.

Sendo V_1 o valor após o aumento, temos:

$V_1 = V . (1 + \frac{p_1}{100})$

Sendo V_2 o valor após o desconto, temos:

$V_2 = V_1 . (1 - \frac{p_2}{100})$

$V_2 = V . (1 + \frac{p_1}{100}) . (1 - \frac{p_2}{100})$

Exemplo

(VUNESP-SP) Uma instituição bancária oferece um rendimento de 15% ao ano para depósitos feitos numa certa modalidade de aplicação financeira. Um cliente deste banco deposita 1 000 reais nessa aplicação. Ao final de *n* anos, o capital que esse cliente terá em reais, relativo a esse depósito, são:

Resolução: $V^A = \left(1+\frac{p}{100}\right)^n .v$

$$V^A = \left(1.\frac{15}{100}\right)^n .1000$$

V^A = 1 000 . (1,15)n
V^A = 1 000 . 1,15n
V^A = 1 150,00n

Exercícios resolvidos

QUESTÃO 01
(Fuvest-SP) $(10\%)^2$ =
a) 100%
b) 20%
c) 5%
d) 1%
e) 0,01%

QUESTÃO 02
Quatro é quantos por cento de cinco?

QUESTÃO 03
(PUC-SP) O preço de venda de um bem de consumo é R$ 100,00. O comerciante tem um ganho de 25% sobre o preço de custo deste bem. O valor do preço de custo é:
a) R$ 25,00
b) R$ 70,50
c) R$ 75,00
d) R$ 80,00
e) R$ 125,00

QUESTÃO 04
(VUNESP-SP) O dono de um supermercado comprou de seu fornecedor um produto por x reais (preço de custo) e passou a revendê-lo com lucro de 50%. Ao fazer um dia de promoções, ele deu aos clientes do supermercado um desconto de 20% sobre o preço de venda deste produto. Pode-se afirmar que, no dia de promoções, o dono do supermercado teve, sobre o preço de custo:
a) Prejuízo de 10%.
b) Prejuízo de 5%.
c) Lucro de 20%.
d) Lucro de 25%.
e) Lucro de 30%.

QUESTÃO 05
(Mackenzie-SP) Um produto teve um aumento total de preço de 61% através de 2 aumentos sucessivos. Se o primeiro aumento foi de 15%, então o segundo foi de:
a) 38%
b) 40%
c) 42%
d) 44%
e) 46%

QUESTÃO 06
(FUVEST-SP) Barnabé tinha um salário de x reais em janeiro. Recebeu aumento de 80% em maio e 80% em novembro. Seu salário atual é:
a) 2,56 x
b) 1,6x
c) x + 160
d) 2,6x
e)3,24x

QUESTÃO 07
(PUC-SP) Descontos sucessivos de 20% e 30% são equivalentes a um único desconto de:
a) 25%
b) 26%
c) 44%
d) 45%
e)50%

QUESTÃO 08
(FUVEST-SP) A cada ano que passa o valor de um carro diminui em 30% em relação ao seu valor do ano anterior. Se V for o valor do carro no primeiro ano, o seu valor no oitavo ano será:
a) $(0,7)^7$ V
b) $(0,3)^7$ V
c) $(0,7)^8$ V
d) $(0,3)^8$ V
e) $(0,3)^9$ V

QUESTÃO 09
Numa cidade, havia cerca de 25 000 desempregados para uma população economicamente ativa de 500 000 habitantes. Qual era a taxa percentual de desempregados nessa cidade?

QUESTÃO 10
Se 4% do total de bolinhas de uma piscina correspondem a 20 unidades, qual o total de bolinhas que está na piscina?

Resoluções

1) Resposta "D".
Solução:

$$\frac{10}{100}.\frac{10}{100} = \frac{1}{100} = 1\%$$

2) Resposta "80%".
Solução:
05 ---------- 100%
04 ---------- x

$5 . x = 4 . 100 \rightarrow 5x = 400 \rightarrow x = \frac{400}{5} = 80\%$

3) Resposta "D".
Solução:
Pcusto = 100,00

O Pcusto mais 25% do Pcusto = 100,00
Pc + 0,25Pc = 100,00
1,25Pc = 100,00

$Pc = \frac{100}{1,25} \rightarrow Pc = 80,00$

4) Resposta "C".
Solução:
X reais (preço de custo)

Lucro de 50%: x + 50% = $x + \frac{50}{100} = \frac{100x+50}{100} = \frac{10x+5}{10} = \frac{2x+1}{2}$ (dividimos por 10 e depois dividimos por 5).

Suponhamos que o preço de custo seja 1, então substituindo o x da equação acima, o preço de venda com 50% de lucro seria 1,50.

Se 1,50 é 100%
X 20% fazemos esta regra de três para achar os 20%: 20.1,50 100 = 0,30

Então no dia de promoção o valor será de 1,20. Isto é, 20% de lucro em cima do valor de custo. Alternativa C.

5) Resposta "B".
Solução: Se usarmos a fórmula do aumento sucessivo citada na matéria será:

$V_2 = V.(1 + \frac{p_1}{100}).(1 - \frac{p_2}{100}).$

Substituindo V por um valor: 1, então no final dos dois aumentos esse valor será de $1,61=V_2$.

$1,61 = 1.(1 + \frac{15}{100}).(1 - \frac{p_2}{100})$

$1,61 = (1 + \frac{15}{100}).(1 - \frac{p_2}{100})$ (mmc de 100)

$1,61 = (\frac{115}{100}).(1 - \frac{p_2}{100})$

$1,61 = -\frac{115(100 - P2)}{10000}$

$16100 = -11.500 + 115P_2$
$115P_2 = -11.500 + 16100$
$P_2 = 4600/115$
$P_2 = 40\%$

6) Resposta "E".
Solução:

$S_A = \left(1 + \frac{80}{100}\right).\left(1 + \frac{80}{100}\right).x = 1,8 .1,8.x = 3,24x$

7) Resposta "C".
Solução: Se usarmos a fórmula do desconto sucessivo citada na matéria será:

$V_2 = V.(1 - \frac{p_1}{100}).(1 - \frac{p_2}{100})$

Substituindo V por um valor: 1, ficará:

$V_2 = 1.(1 - \frac{20}{100}).(1 - \frac{30}{100})$

$V_2 = (\frac{100-20}{100}).(\frac{100-30}{100})$

$V_2 = (\frac{80}{100}).(\frac{70}{100})$

$V_2 = \frac{5600}{10000}$

$V_2 = \frac{56}{100}$ que é igual a 56%

100% - 56% = 44%

8) Resposta "A".
Solução:
1º ano = 1
2º ano = 0,70 – 30% (0,21)
3º ano = 0,49 – 30% (0,147)
4º ano = 0,343 – 30 % (0,1029)
5º ano = 0,2401 – 30% (0,07203)
6º ano = 0,16807 – 30% (0,050421)
7º ano = 0,117649 – 30% (0,0352947)
8º ano = 0,0823543

$0,0823543 = (0,7)^7V$

9) Resposta "5%".

Solução: Em 500 000 habitantes → 25 000 desempregados

Em 100 000 habitantes → 5 000 desempregados

Em 100 habitantes → 5 desempregados

$$\frac{5}{100} = 5\% \; ou \frac{25000}{500000} = \frac{5}{100} = 5\%$$

Portanto, 5% da população da cidade é desempregada.

10) Resposta "500 unidades".

Solução: 4% → 20 bolinhas. Então:

20% → 100 bolinhas

100% → 500 bolinhas

Ou, ainda, representando por x o total de bolinhas: 4% de x equivalem a 20.

Como $4\% = \frac{4}{100} = 0{,}004$, podemos escrever:

$$0{,}04 \,.\, x = 20 \rightarrow x = \frac{20}{0{,}04} \rightarrow x = 500.$$

Logo, o total de bolinhas na piscina são 500 unidades.

JUROS SIMPLES

Toda vez que falamos em juros estamos nos referindo a uma quantia em dinheiro que deve ser paga por um devedor, pela utilização de dinheiro de um credor (aquele que empresta).

- Os juros são representados pela letra ***j***.
- O dinheiro que se deposita ou se empresta chamamos de capital e é representado pela letra C.
- O tempo de depósito ou de empréstimo é representado pela letra ***t***.
- A taxa de juros é a razão centesimal que incide sobre um capital durante certo tempo. É representado pela letra ***i*** e utilizada para calcular juros.

Chamamos de simples os juros que são somados ao capital inicial no final da aplicação.

Devemos sempre relacionar taxa e tempo numa mesma unidade:

Taxa anual ---------- tempo em anos

Taxa mensal---------- tempo em meses

Taxa diária---------- tempo em dias

Consideremos, como **exemplo**, o seguinte problema:

Uma pessoa empresta a outra, a juros simples, a quantia de R$ 3. 000,00, pelo prazo de 4 meses, à taxa de 2% ao mês. Quanto deverá ser pago de juros?

Resolução:

- Capital aplicado (**C**): R$ 3.000,00
- Tempo de aplicação (**t**): 4 meses
- Taxa (**i**): 2% ou 0,02 a.m. (= ao mês)

Fazendo o cálculo, mês a mês:

- No final do 1º período (1 mês), os juros serão: 0,02 x R$ 3.000,00 = R$ 60,00
- No final do 2º período (2 meses), os juros serão: R$ 60,00 + R$ 60,00 = R$ 120,00
- No final do 3º período (3 meses), os juros serão: R$ 120,00 + R$ 60,00 = R$ 180,00
- No final do 4º período (4 meses), os juros serão: R$ 180,00 + R$ 60,00 = R$ 240,00

Desse modo, no final da aplicação, deverão ser pagos R$ 240,00 de juros.

Fazendo o cálculo, período a período:

- No final do 1º período, os juros serão: i.C
- No final do 2º período, os juros serão: i.C + i.C
- No final do 3º período, os juros serão: i.C + i.C + i.C

- No final do período **t**, os juros serão: i.C + i.C + i.C + ... + i.C

Portanto, temos:

J = C . i. t

Observações:

1) A taxa **i** e o tempo **t** devem ser expressos na mesma unidade.

2) Nessa fórmula, a taxa **i** deve ser expressa na forma decimal.

3) Chamamos de **montante** (**M**) a soma do capital com os juros, ou seja: Na fórmula J= C . i . t, temos quatro variáveis. Se três delas forem valores conhecidos, podemos calcular o 4º valor.

M = C+ j

Exemplo

A que taxa esteve empregado o capital de R$ 20.000,00 para render, em 3 anos, R$ 28.800,00 de juros? (Observação: Como o tempo está em anos devemos ter uma taxa anual.)

C = R$ 20.000,00
t = 3 anos
j = R$ 28.800,00
i = ? (ao ano)

$$j = \frac{C.i.t}{100}$$

$$28\,800 = \frac{20000.\,i.3}{100}$$

28 800 = 600 . i

$$i = \frac{28.800}{600}$$

i = 48

Resposta: 48% ao ano.

JUROS COMPOSTOS

O capital inicial (principal) pode crescer, como já sabemos, devido aos juros, segundo duas modalidades, a saber:

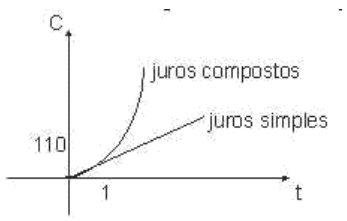
Juros simples - ao longo do tempo, somente o principal rende juros.

Juros compostos - após cada período, os juros são incorporados ao principal e passam, por sua vez, a render juros. Também conhecido como "juros sobre juros".

Vamos ilustrar a diferença entre os crescimentos de um capital através juros simples e juros compostos, com um exemplo: Suponha que $100,00 são empregados a uma taxa de 10% a.a. (ao ano) Teremos:

Principal = 100	Juros simples	Juros compostos		
Nº de anos	Montante simples	Montante composto		
1	100+0,1(100) = 110	100+0,1(100)	=	110,00
2	110+0,1(100) = 120	110+0,1(110)	=	121,00
3	120+0,1(100) = 130	121+0,1(121)	=	133,10
4	130+0,1(100) = 140	133,1+0,1(133,1)	=	146,41
5	140+0,1(100) = 150	146,41+0,1(146,41)	=	161,05

Observe que o crescimento do principal segundo juros simples é LINEAR enquanto que o crescimento segundo juros compostos é EXPONENCIAL, e, portanto tem um crescimento muito mais "rápido". Isto poderia ser ilustrado graficamente da seguinte forma:



Na prática, as empresas, órgãos governamentais e investidores particulares costumam reinvestir as quantias geradas pelas aplicações financeiras, o que justifica o emprego mais comum de juros compostos na Economia. Na verdade, o uso de juros simples não se justifica em estudos econômicos.

Fórmula para o cálculo de Juros compostos

Considere o capital inicial (principal P) $1000,00 aplicado a uma taxa mensal de juros compostos (i) de 10% (i = 10% a.m.). Vamos calcular os montantes (principal + juros), mês a mês:

Após o 1º mês, teremos: M_1 = 1000 x 1,1 = 1100 = 1000(1 + 0,1)

Após o 2º mês, teremos: M_2 = 1100 x 1,1 = 1210 = $1000(1 + 0,1)^2$

Após o 3º mês, teremos: M_3 = 1210 x 1,1 = 1331 = $1000(1 + 0,1)^3$

.....

Após o nº (enésimo) mês, sendo S o montante, teremos evidentemente: $S = 1000(1 + 0,1)^n$

De uma forma genérica, teremos para um principal P, aplicado a uma taxa de juros compostos i durante o período n : $S = P\,(1 + i)^n$

onde S = montante, P = principal, i = taxa de juros e n = número de períodos que o principal P (capital inicial) foi aplicado.

Nota: Na fórmula acima, as unidades de tempo referentes à taxa de juros (i) e do período (n), tem de ser necessariamente iguais. Este é um detalhe importantíssimo, que não pode ser esquecido! Assim, por exemplo, se a taxa for 2% ao mês e o período 3 anos, deveremos considerar 2% ao mês durante 3x12=36 meses.

Exemplos

1 – Expresse o número de períodos n de uma aplicação, em função do montante S e da taxa de aplicação i por período.

Solução:

Temos $S = P(1+i)^n$

Logo, $S/P = (1+i)^n$

Pelo que já conhecemos de logaritmos, poderemos escrever:

$n = \log_{(1+i)} (S/P)$. Portanto, usando logaritmo decimal (base 10), vem:

$$n = \frac{\log(S/P)}{\log(1+i)} = \frac{\log S - \log P}{\log(1+i)}$$

Temos também da expressão acima que: n.log(1 + i) = logS – logP

Deste exemplo, dá para perceber que o estudo dos juros compostos é uma aplicação prática do estudo dos logaritmos.

2 – Um capital é aplicado em regime de juros compostos a uma taxa mensal de 2% (2% a.m.). Depois de quanto tempo este capital estará duplicado?

Solução: Sabemos que $S = P\ (1 + i)^n$. Quando o capital inicial estiver duplicado, teremos S = 2P.

Substituindo, vem: $2P = P(1+0{,}02)^n$ [Obs: 0,02 = 2/100 = 2%]

Simplificando, fica:

$2 = 1{,}02^n$, que é uma equação exponencial simples.

Teremos então: $n = \log_{1,02}2 = \log2 / \log1{,}02 = 0{,}30103 / 0{,}00860 = 35$

Nota: log2 = 0,30103 e log1,02 = 0,00860; estes valores podem ser obtidos rapidamente em máquinas calculadoras científicas. Caso uma questão assim caia no vestibular, o examinador teria de informar os valores dos logaritmos necessários, ou então permitir o uso de calculadora na prova, o que não é comum no Brasil.

Portanto, o capital estaria duplicado após 35 meses (observe que a taxa de juros do problema é mensal), o que equivale a 2 anos e 11 meses.

Resposta: 2 anos e 11 meses.

Exercícios resolvidos

QUESTÃO 01

Uma Loja de eletrodomésticos apresenta a seguinte oferta para a venda de um DVD player:

À vista R$ 539,00 ou

12x 63,60 = R$ 763,20.

De quanto será o acréscimo sobre o preço à vista se o produto for comprado em 12 vezes?

QUESTÃO 02

Calcule o juros simples gerado por um capital de R$ 2 500,00, quando aplicado durante 8 meses a uma taxa de 3,5% a.m.

QUESTÃO 03

Uma aplicação financeira, feita durante 2 meses a uma taxa de 3% ao mês, rendeu R$ 1 920,00 de juro. Qual foi a quantia aplicada?

QUESTÃO 04

Um capital de R$ 4.000,00 foi aplicado durante 3 meses, à juros simples, à taxa de 18% a.a. Pede-se:

a) Juros

b) Montante.

QUESTÃO 05

Calcular o juro simples referente a um capital de $ 2.400,00 nas seguintes condições:

Taxa de Juros	Prazo
a) 21% a.a.	1 ano
b) 21% a.a.	3 anos

QUESTÃO 06

Qual o montante de uma aplicação de $16.000,00, a juros compostos, pelo prazo de 4 meses, à taxa de 2,5% a.m.?

QUESTÃO 07

Calcule o montante e os juros da aplicação abaixo, considerando o regime de juros compostos:

Capital	Taxa de Juros	Prazo de Antecipação
R$ 20.000,00	3,0% a.m.	7 meses

QUESTÃO 08

O capital R$ 500,00 foi aplicado durante 8 meses à taxa de 5% ao mês. Qual o valor dos juros compostos produzidos?

QUESTÃO 09

Qual a aplicação inicial que, empregada por 1 ano e seis meses, à taxa de juros compostos de 3% ao trimestre, se torna igual a R$ 477,62?

QUESTÃO 10

Calcular o montante gerado a partir de R$ 1.500,00, quando aplicado à taxa de 60% ao ano com capitalização mensal, durante 1 ano.

Resoluções

1) Resposta "R$ 224,20".

Solução: Basta apenas tirar o valor à prazo sobre o à vista:

R$ 763,20 – R$ 539,00 = R$ 224,20.

2) Resposta "R$ 700,00".

Solução: Dados:

Capital (quantia aplicada): R$ 2 500,00

Taxa de juros: 3,5 a.m.

Tempo de aplicação: 8 meses

Juro: ?

Representando o juro por x, podemos ter:

x = (3,5% de 2 500) . 8

x = (0,035 . 2 500) . 8

x = 700

Conclui-se que o juro é de R$ 700,00.

3) Resposta "R$ 32 000,00".
Solução: Dados:
Capital (quantia plicada) ?
Taxa de juro: 3% a.m.
Tempo de aplicação: 2 meses
Juro: R$ 1 920,00

Calculando a quantia que a aplicação rendeu juro ao mês:
1 920÷2 = 960

Representando o capital aplicado por x, temos:
3% de x dá 960
0,03 . x = 960
0,03x = 960

$x = \frac{960}{0,03} \rightarrow x = 32\,000$

Logo, o capital aplicado foi de R$ 32 000,00.

4) Resposta "Juros: R$ 180,00; Montante R$ 4 180,00".
Solução:
a → J = Cin
J = 4000 {[(18/100)/12]x3}
J = 4000 {[0,18/12]x3}
J = 4000 {0,015 x 3}
J = 4000 x 0,045
J = 180,00

B → M = C + J
M = 4000 + 180
M = 4.180,00

5) Resposta " R$ 504,00; R$ 1 512,00 "
Solução:
a → J = Cit
J = 2400 [(21/100)x1]
J = 2400 [0,21 x 1]
J = 2400 x 0,21
J = 504,00

b → J = Cin
J = 2400 [(21/100)x3]
J = 2400 [0,21x3]
J = 2400 0,63
J = 1.512,00

6) Resposta "17 661,01".
Solução: Dados:
C: 16000
i: 2,5% a.m.
n: 4 meses.

$$M = C(1+i)^n$$

$$M = 16000\left[1+\left(\frac{2,5}{100}\right)\right]^4 \rightarrow M = 16000\left[1+0,025\right]^4 \rightarrow M = 16000\left[1,025\right]^4 \rightarrow M = 16000 \times 1,103812891 \rightarrow M = 17.661,01$$

7) Resposta "24 597,48".
Solução: Dados:
C: 20000
i: 3,0% a.m.
n: 7 meses.

$$M = C(1+i)^n$$

$$M = 20000\left[1+\left(\frac{3}{100}\right)\right]^7 \rightarrow M = 20000\left[1+0{,}03\right]^7 \rightarrow M = 20000\left[1{,}03\right]^7 \rightarrow M = 20000 \times 1{,}229873685 \rightarrow M = 24.597{,}48$$

8) Resposta "R$ 238,73".
Solução: Dados:
C = R$ 500
i = 5% = 0,05
n = 8 (as capitalizações são mensais)
$M = C \cdot (1 + i)^n \Rightarrow M = 500 \cdot (1{,}05)^8 \Rightarrow M = R\$\ 738{,}73$

O valor dos juros será:
J = 738,73 – 500
J = R$ 238,73

9) Resposta " R$ 400,00".
Solução:
M = R$ 477,62
i = 3% = 0,03
n = 6 (as capitalizações são trimestrais)
$M = C \cdot (1 + i)^n$
$477{,}62 = C \cdot (1{,}03)^6$

$$C = \frac{477{,}62}{1{,}19405}$$

C = R$ 400,00.

10) Resposta "R$ 2.693,78".
Solução:
Observamos que 60% *ao ano* é uma taxa nominal; a capitalização é *mensal*.

A taxa efetiva é, portanto, 60% ÷ 12 = 5% ao mês.
C = R$ 1.500
i = 5% = 0,05
n = 12
$M = C \cdot (1 + i)^n$
$M = 1.500 \cdot (1{,}05)^{12}$
$M = 1.500 \cdot 1{,}79586$
M = R$ 2.693,78

Relação entre Grandezas

Números Diretamente Proporcionais

Considere a seguinte situação:

Joana gosta de queijadinha e por isso resolveu aprender a fazê-las. Adquiriu a receita de uma amiga. Nessa receita, os ingredientes necessários são:

3 ovos
1 lata de leite condensado
1 xícara de leite
2 colheres das de sopa de farinha de trigo
1 colher das de sobremesa de fermento em pó
1 pacote de coco ralado
1 xícara de queijo ralado
1 colher das de sopa de manteiga

Veja que:

- Para se fazerem 2 receitas seriam usados 6 ovos para 4 colheres de farinha;
- Para se fazerem 3 receitas seriam usados 9 ovos para 6 colheres de farinha;
- Para se fazerem 4 receitas seriam usados 12 ovos para 8 colheres de farinha;
- Observe agora as duas sucessões de números:

Sucessão do número de ovos: 6 9 12
Sucessão do número de colheres de farinha: 4 6 8

Nessas sucessões as razões entre os termos correspondentes são iguais:

$$\frac{6}{4}=\frac{3}{2} \qquad \frac{9}{6}=\frac{3}{2} \qquad \frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

Assim: $\frac{6}{4}=\frac{9}{6}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

Dizemos, então, que:

- os números da sucessão 6, 9, 12 são **diretamente proporcionais** aos da sucessão 4, 6, 8;
- o número $\frac{3}{2}$, que é a razão entre dois termos correspondentes, é chamado **coeficiente de proporcionalidade**.

Duas sucessões de números não-nulos são diretamente proporcionais quando as razões entre cada termo da primeira sucessão e o termo correspondente da segunda sucessão são iguais.

Exemplo1: Vamos determinar x e *y*, de modo que as sucessões sejam diretamente proporcionais:

2 8 *y*
3 x 21

Como as sucessões são diretamente proporcionais, as razões são iguais, isto é:

$$\frac{2}{3}=\frac{8}{x}=\frac{y}{21}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{8}{x} \qquad \frac{2}{3}=\frac{y}{21}$$

2x = 3 . 8 3y = 2 . 21

2x = 24 3y = 42

$x=\frac{24}{2}$ $y=\frac{42}{3}$

x = 12 y = 14

Logo, x = 12 e *y* = 14

Exemplo 2: Para montar uma pequena empresa, Júlio, César e Toni formaram uma sociedade. Júlio entrou com R$ 24.000,00, César com R$ 27.000,00 e Toni com R$ 30.000,00. Depois de 6 meses houve um lucro de R$ 32.400,00 que foi repartido entre eles em partes diretamente proporcionais à quantia investida. Calcular a parte que coube a cada um.

Solução:

Representando a parte de Júlio por x, a de César por *y*, e a de Toni por z, podemos escrever:

$$\begin{cases} x+y+z=32400 \\ \frac{x}{24000}=\frac{y}{27000}=\frac{z}{30000} \end{cases}$$

$$\frac{x}{24000}=\frac{y}{27000}=\frac{z}{30000}=\frac{\overbrace{x+y+z}^{32400}}{\underbrace{24000+27000+30000}_{81000}}$$

Resolvendo as proporções:

$$\frac{x}{24000}=\frac{\cancel{32400}^{4}}{\cancel{81000}^{10}} \qquad \frac{y}{27000}=\frac{4}{10} \qquad \frac{z}{3000}=\frac{4}{10}$$

10x = 96 000 10y = 108 000 10z = 120 000
x = 9 600 y = 10 800 z = 12 000

Logo, Júlio recebeu R$ 9.600,00, César recebeu R$ 10.800,00 e Toni, R$ 12.000,00.

NÚMEROS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Considere os seguintes dados, referentes à produção de sorvete por uma máquina da marca x-5:
1 máquina x-5 produz 32 litros de sorvete em 120 min.
2 máquinas x-5 produzem 32 litros de sorvete em 60 min.
4 máquinas x-5 produzem 32 litros de sorvete em 30 min.
6 máquinas x-5 produzem 32 litros de sorvete em 20 min.

Observe agora as duas sucessões de números:

Sucessão do número de máquinas:	1	2	4	6
Sucessão do número de minutos:	120	60	30	20

Nessas sucessões as razões entre cada termo da primeira sucessão e o inverso do termo correspondente da segunda são iguais:

$$\frac{1}{\frac{1}{120}} = \frac{2}{\frac{1}{60}} = \frac{4}{\frac{1}{30}} = \frac{6}{\frac{1}{20}} = 120$$

Dizemos, então, que:
- os números da sucessão 1, 2, 4, 6 são inversamente proporcionais aos da sucessão 120, 60, 30, 20;
- o número 120, que é a razão entre cada termo da primeira sucessão e o inverso do seu correspondente na segunda, é chamado **fator de proporcionalidade**.

Observando que

$\frac{1}{\frac{1}{20}}$ é o mesmo que 1 . 120 = 120

$\frac{4}{\frac{1}{30}}$ é o mesmo que 4 . 30 = 120

$\frac{2}{\frac{1}{60}}$ é o mesmo que 2 . 60 = 120

$\frac{6}{\frac{1}{20}}$ é o mesmo que 6 . 20 = 120

podemos dizer que: Duas sucessões de números não-nulos são inversamente proporcionais quando os produtos de cada termo da primeira sucessão pelo termo correspondente da segunda sucessão são iguais.

Exemplo 1: Vamos determinar x e *y*, de modo que as sucessões sejam inversamente proporcionais:

4	x	8
20	16	*y*

Para que as sucessões sejam inversamente proporcionais, os produtos dos termos correspondentes deverão ser iguais. Então devemos ter:

4 . 20 = 16 . x = 8 . y

16 . x = 4 . 20
16x = 80
x = 80/16
x = 5

8 . y = 4 . 20
8y = 80
y = 80/8
y = 10

Logo, x = 5 e y = 10.

Exemplo 2: Vamos dividir o número 104 em partes inversamente proporcionais aos números 2, 3 e 4.

Representamos os números procurados por x, *y* e z. E como as sucessões (x, *y*, z) e (2, 3, 4) devem ser inversamente proporcionais, escrevemos:

$$\frac{x}{\frac{1}{2}}=\frac{y}{\frac{1}{3}}=\frac{z}{\frac{1}{4}} \qquad \frac{x}{\frac{1}{2}}=\frac{y}{\frac{1}{3}}=\frac{z}{\frac{1}{4}}\ \frac{\overbrace{x+y+z}^{104}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}$$

Como $\dfrac{104}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=\dfrac{104}{\frac{6+4+3}{12}}=\dfrac{104}{\frac{13}{12}}=104:\dfrac{13}{12}=104^{8}.\dfrac{12}{13^{1}}=\dfrac{\cancel{96}}{\cancel{1}}$, vem:

$$\frac{x}{\frac{1}{2}}=\frac{96}{1} \qquad \frac{y}{\frac{1}{3}}=\frac{96}{1} \qquad \frac{z}{\frac{1}{4}}=\frac{96}{1}$$

$$x=\cancel{96}^{48}.\frac{1}{\cancel{2}^{1}} \qquad y=96^{32}.\frac{\cancel{1}}{\cancel{3}^{1}} \qquad z=96^{24}.\frac{\cancel{1}}{\cancel{4}^{1}}$$

x = 48 y = 32 z = 24

Logo, os números procurados são 48, 32 e 24.

GRANDEZAS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

Considere uma usina de açúcar cuja produção, nos cinco primeiros dias da safra de 2005, foi a seguinte:

Dias	Sacos de açúcar
1	5 000
2	10 000
3	15 000
4	20 000
5	25 000

Com base na tabela apresentada observamos que:
- duplicando o número de dias, duplicou a produção de açúcar;
- triplicando o número de dias, triplicou a produção de açúcar, e assim por diante.

Nesse caso dizemos que as grandezas **tempo** e **produção** são **diretamente proporcionais**.
Observe também que, duas a duas, as razões entre o número de dias e o número de sacos de açúcar são iguais:

$$\frac{1}{2}=\frac{5000}{10000} \qquad \frac{1}{4}=\frac{5000}{20000} \qquad \frac{2}{3}=\frac{10000}{15000} \qquad \frac{2}{5}=\frac{10000}{25000} \qquad \frac{3}{5}=\frac{15000}{25000}$$

$$\frac{1}{3}=\frac{5000}{15000} \qquad \frac{1}{5}=\frac{5000}{25000} \qquad \frac{2}{4}=\frac{10000}{20000} \qquad \frac{3}{4}=\frac{15000}{20000} \qquad \frac{4}{5}=\frac{20000}{25000}$$

Isso nos leva a estabelecer que: Duas grandezas são diretamente proporcionais quando a razão entre os valores da primeira é igual à razão entre os valores da segunda.

Tomemos agora outro exemplo.

Com 1 tonelada de cana-de-açúcar, uma usina produz 70l de álcool.

De acordo com esses dados podemos supor que:

- com o dobro do número de toneladas de cana, a usina produza o dobro do número de litros de álcool, isto é, 140l;
- com o triplo do número de toneladas de cana, a usina produza o triplo do número de litros de álcool, isto é, 210l.

Então concluímos que as grandezas quantidade de cana-de-açúcar e número de litros de álcool são **diretamente proporcionais.**

GRANDEZAS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Considere uma moto cuja velocidade média e o tempo gasto para percorrer determinada distância encontram-se na tabela:

Velocidade	Tempo
30 km/h	12 h
60 km/h	6 h
90 km/h	4 h
120 km/h	3 h

Com base na tabela apresentada observamos que:

- duplicando a velocidade da moto, o número de horas fica reduzido à metade;
- triplicando a velocidade, o número de horas fica reduzido à terça parte, e assim por diante.

Nesse caso dizemos que as grandezas **velocidade** e **tempo** são **inversamente proporcionais**.

Observe que, duas a duas, as razões entre os números que indicam a velocidade são iguais ao inverso das razões que indicam o tempo:

$$\frac{30}{60} = \frac{6}{12} \text{ inverso da razão } \frac{12}{6}$$

$$\frac{60}{90} = \frac{4}{6} \text{ inverso da razão } \frac{6}{4}$$

$$\frac{30}{90} = \frac{4}{12} \text{ inverso da razão } \frac{12}{4}$$

$$\frac{60}{120} = \frac{3}{6} \text{ inverso da razão } \frac{6}{3}$$

$$\frac{30}{120} = \frac{3}{12} \text{ inverso da razão } \frac{12}{3}$$

$$\frac{90}{120} = \frac{3}{4} \text{ inverso da razão } \frac{4}{3}$$

Podemos, então, estabelecer que: Duas grandezas são inversamente proporcionais quando a razão entre os valores da primeira é igual ao inverso da razão entre os valores da segunda.

Acompanhe o exemplo a seguir:

Cinco máquinas iguais realizam um trabalho em 36 dias. De acordo com esses dados, podemos supor que:

- o dobro do número de máquinas realiza o mesmo trabalho na metade do tempo, isto é, 18 dias;
- o triplo do número de máquinas realiza o mesmo trabalho na terça parte do tempo, isto é, 12 dias.

Então concluímos que as grandezas **quantidade de máquinas** e **tempo** são **inversamente proporcionais**.

Exercícios resolvidos

QUESTÃO 01

Calcule x e y nas sucessões diretamente proporcionais:

a) 1 x 7
5 15 y

b) 5 10 y
x 8 24

c) x y 21
14 35 49

d) 8 12 20
x y 35

QUESTÃO 02

Calcule x e y nas sucessões inversamente proporcionais:

a) 4 x y
25 20 10

b) 30 15 10
x 8 y

c) 2 10 y
x 9 15

d) x y 2
12 4 6

QUESTÃO 03

Divida 132 em partes inversamente proporcionais a 2, 5 e 8.

QUESTÃO 04

Reparta 91 em partes inversamente proporcionais a $\frac{1}{3}, \frac{1}{4} e \frac{1}{6}$.

QUESTÃO 05

Divida 215 em partes diretamente proporcionais a $\frac{3}{4}, \frac{5}{2} e \frac{1}{3}$.

QUESTÃO 06

Marcelo repartiu entre seus filhos Rafael (15 anos) e Matheus (12 anos) 162 cabeças de gado em partes diretamente proporcionais à idade de cada um. Qual a parte que coube a Rafael?

QUESTÃO 07

Evandro, Sandro e José Antônio resolveram montar um pequeno negócio, e para isso formaram uma sociedade. Evandro entrou com R$ 24.000,00, Sandro com R$ 30.000,00, José Antônio com R$ 36.000,00. Depois de 4 meses tiveram um lucro de R$ 60.000,00, que foi repartido entre eles. Quanto recebeu cada um? (**Nota**: A divisão do lucro é diretamente proporcional à quantia que cada um empregou.)

QUESTÃO 08

Leopoldo e Wilson jogam juntos na Sena e acertam os seis números, recebendo um prêmio de R$ 750.000,00. Como Leopoldo participou com R$ 80,00 e Wilson com R$ 70,00, o prêmio foi dividido entre eles em partes diretamente proporcionais à participação de cada um. Qual a parte que coube a Wilson?

QUESTÃO 09

O proprietário de uma chácara distribuiu 300 laranjas a três famílias em partes diretamente proporcionais ao número de filhos. Sabendo-se que as famílias A, B e C têm respectivamente 2, 3 e 5 filhos, quantas laranjas recebeu cada família?

QUESTÃO 10

(UFAC) João, Paulo e Roberto formam uma sociedade comercial e combinam que o lucro advindo da sociedade será dividido em partes diretamente proporcionais às quantias que cada um dispôs para formarem a sociedade. Se as quantias empregadas por João, Paulo e Roberto foram, nesta ordem, R$ 1.500.000,00, R$ 1.000.000,00 e R$ 800.000,00, e o lucro foi de R$ 1.650.000,00, que parte do lucro caberá a cada um?

Resoluções

1-
a) x = 3 y = 35
b) x = 4 y = 30
c) x = 6 y = 15
d) x = 14 y = 21

2- a) x = 5 y = 10
b) x = 4 y = 12
c) x = 45 y = 6
d) x = 1 y = 3

3- 80, 32, 20

4- 21, 28, 43

5- 45, 150, 20

6- 90

7- Evandro R$16.000,00 Sandro R$20.000,00 José Antônio R$24.000,00

8- R$350.000,00

9- 60, 90, 150

10- João R$750.000,00 Paulo R$500.000,00 Roberto R$400.000,00

Resolução 04

x+y+z

--------- = x/3 ou y/4 ou z/6 (as frações foram invertidas porque 3+4+6 as partes são inversas)

91/13=x/3
13x=273
x=21

91/13=y/4
13y=364
y=28

91/13=z/6
13z=546
z=42

Resolução 05

x/(3/4) = y/(5/2) = z/(1/3) = k (constante)
x + y + z = 215
3k/4 + 5k/2 + k/3 = 215
(18k + 60k + 8k)/24 = 215 → k = 60
x = 60.(3/4) = 45
y = 60.(5/2) = 150
z = 60/3 = 20
(x, y, z) → partes diretamente proporcionais

Resolução 06

x = Rafael
y = Mateus

x/15 + y /12 = 160/27 (dividindo 160 por 27 (dá 6), e fazendo proporções, só calcular)

x/15=6
x=90

y/12=6
y=72

PROGRESSÃO ARITMÉTICA (PA)

Podemos, no nosso dia-a-dia, estabelecer diversas sequências como, por exemplo, a sucessão de cidades que temos numa viagem de automóvel entre Brasília e São Paulo ou a sucessão das datas de aniversário dos alunos de uma determinada escola.

Podemos, também, adotar para essas sequências uma ordem numérica, ou seja, adotando a_1 para o 1° termo, a_2 para o 2° termo até a_n para o n-ésimo termo. Dizemos que o termo a_n é também chamado termo geral das sequências, em que *n* é um número natural diferente de zero. Evidentemente, daremos atenção ao estudo das sequências numéricas.

As sequências podem ser finitas, quando apresentam um último termo, ou, infinitas, quando não apresentam um último termo. As sequências infinitas são indicadas por reticências no final.

Exemplos:

- Sequência dos números primos positivos: (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...). Notemos que esta é uma sequência infinita com $a_1 = 2$; $a_2 = 3$; $a_3 = 5$; $a_4 = 7$; $a_5 = 11$; $a_6 = 13$ etc.

- Sequência dos números ímpares positivos: (1, 3, 5, 7, 9, 11, ...). Notemos que esta é uma sequência infinita com $a_1 = 1$; $a_2 = 3$; $a_3 = 5$; $a_4 = 7$; $a_5 = 9$; $a_6 = 11$ etc.

- Sequência dos algarismos do sistema decimal de numeração: (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Notemos que esta é uma sequência finita com $a_1 = 0$; $a_2 = 1$; $a_3 = 2$; $a_4 = 3$; $a_5 = 4$; $a_6 = 5$; $a_7 = 6$; $a_8 = 7$; $a_9 = 8$; $a_{10} = 9$.

1. Igualdade

As sequências são apresentadas com os seus termos entre parênteses colocados de forma ordenada. Sucessões que apresentarem os mesmos termos em ordem diferente serão consideradas sucessões diferentes.

Duas sequências só poderão ser consideradas iguais se, e somente se, apresentarem os mesmos termos, na mesma ordem.

Exemplo

A sequência (x, y, z, t) poderá ser considerada igual à sequência (5, 8, 15, 17) se, e somente se, x = 5; y = 8; z = 15; e t = 17.

Notemos que as sequências (0, 1, 2, 3, 4, 5) e (5, 4, 3, 2, 1) são diferentes, pois, embora apresentem os mesmos elementos, eles estão em ordem diferente.

2. Formula Termo Geral

Podemos apresentar uma sequência através de uma determina o valor de cada termo a_n em função do valor de *n*, ou seja, dependendo da posição do termo. Esta formula que determina o valor do termo a_n e chamada formula do termo geral da sucessão.

Exemplos

- Determinar os cincos primeiros termos da sequência cujo termo geral e igual a:

$a_n = n - 2n$,com n € N*⇒

Teremos:

$A_1 = 1^2 - 2 . 1 \Rightarrow a_1 = 1$
$A_2 = 2^2 - 2 . 2 \Rightarrow a_2 = 0$
$A_3 = 3^2 - 2 . 3 \Rightarrow a_3 = 3$
$A_4 = 4^2 - 4 . 2 \Rightarrow a_4 = 8$
$A_5 = 5^5 - 5 . 2 \Rightarrow a_5 = 15$

- Determinar os cinco primeiros termos da seqüência cujo termo geral é igual a:

$a_n = 3 . n + 2$, com n € N*.
$a_1 = 3 . 1 + 2 \Rightarrow a_1 = 5$
$a_2 = 3 . 2 + 2 \Rightarrow a_2 = 8$
$a_3 = 3 . 3 + 2 \Rightarrow a_3 = 11$
$a_4 = 3 . 4 + 2 \Rightarrow a_4 = 14$
$a_5 = 3 . 5 + 2 \Rightarrow a_5 = 17$

- Determinar os termos a_{12} e a_{23} da sequência cujo termo geral é igual a:

$a_n = 45 – 4 + n$, com n € N*.

Teremos:
$a_{12} = 45 – 4 . 12 \Rightarrow a_{12} = -3$
$a_{23} = 45 – 4 . 23 \Rightarrow a_{23} = -47$

3. Lei de Recorrências

Uma sequência pode ser definida quando oferecemos o valor do primeiro termo e um "caminho" (uma formula) que permite a determinação de cada termo conhecendo-se o seu antecedente. Essa forma de apresentação de uma sucessão é dita de recorrências.

Exemplos

- Escrever os cinco primeiros termos de uma sequência em que:

$a_1 = 3$ e $a_{n+1} = 2 . a_n - 4$, em que n € N*.

Teremos:
$a_1 = 3$
$a_2 = 2 . a_1 – 4 \Rightarrow a_2 = 2 . 3 – 4 \Rightarrow a_2 = 2$
$a_3 = 2 . a_2 – 4 \Rightarrow a_3 = 2 . 2 - 4 \Rightarrow a_3 = 0$
$a_4 = 2 . a_3 – 4 \Rightarrow a_4 = 2 . 0 - 4 \Rightarrow a_4 = -4$
$a_5 = 2 . a_4 – 4 \Rightarrow a_5 = 2 .(-4) – 4 \Rightarrow a_5 = -12$

- Determinar o termo a_5 de uma sequência em que:

$a_1 = 12$ e $a_{n+1} = a_n – 2$, em que n € N*.
$a_2 = a_1 – 2 \rightarrow a_2 = 12 – 2 \rightarrow a_2=10$
$a_3 = a_2 – 2 \rightarrow a_3 = 10 – 2 \rightarrow a_3 = 8$
$a_4 = a_3 – 2 \rightarrow a_4 = 8 – 2 \rightarrow a_4 = 6$
$a_5 = a_4 – 2 \rightarrow a_5 = 6 – 2 \rightarrow a_5 = 4$

Observação 1

Devemos observar que a apresentação de uma sequência através do termo geral é mais pratica, visto que podemos determinar um termo no "meio" da sequência sem a necessidade de determinarmos os termos intermediários, como ocorre na apresentação da sequência através da lei de recorrências.

Observação 2

Algumas sequências não podem, pela sua forma "desorganizada" de se apresentarem, ser definidas nem pela lei das recorrências, nem pela formula do termo geral. Um exemplo de uma sequência como esta é a sucessão de números naturais primos que já "destruiu" todas as tentativas de se encontrar uma formula geral para seus termos.

4. Artifícios de Resolução

Em diversas situações, quando fazemos uso de apenas alguns elementos da PA, é possível, através de artifícios de resolução, tornar o procedimento mais simples:

PA com três termos: (a – r), a e (a + r), razão igual a r.
PA com quatro termos: (a – 3r), (a – r), (a + r) e (a + 3r), razão igual a 2r.
PA com cinco termos: (a – 2r), (a – r), a, (a + r) e (a + 2r), razão igual a r.

Exemplo

- Determinar os números a, b e c cuja soma é, igual a 15, o produto é igual a 105 e formam uma PA crescente.

Teremos:
Fazendo a = (b – r) e c = (b + r) e sendo a + b + c = 15, teremos:
$(b – r) + b + (b + r) = 15 \rightarrow 3b = 15 \rightarrow b = 5$.

Assim, um dos números, o termo médio da PA, já é conhecido.
Dessa forma a sequência passa a ser:
(5 – r), 5 e (5 + r), cujo produto é igual a 105, ou seja:

$(5 – r) .5 . (5 + r) = 105 \rightarrow 5^2 – r^2 = 21$
$r^2 = 4 \rightarrow 2$ ou r = -2.

Sendo a PA crescente, ficaremos apenas com r= 2.
Finalmente, teremos a = 3, b = 5 e c= 7.

5. Propriedades

P_1: para três termos consecutivos de uma PA, o termo médio é a media aritmética dos outros dois termos.

Exemplo

Vamos considerar três termos consecutivos de uma PA: a_{n-1}, a_n e a_{n+1}. Podemos afirmar que:
I - $a_n = a_{n-1} + r$
II - $a_n = a_{n+1} – r$

Fazendo I + II, obteremos:
$2a_n = a_{n-1} + r + a_n + 1 - r$
$2a_n = a_{n-1} + a_n + 1$

Logo: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

Portanto, para três termos consecutivos de uma PA o termo médio é a media aritmética dos outros dois termos.

6. Termos Equidistantes dos Extremos

Numa sequência finita, dizemos que dois termos são equidistantes dos extremos se a quantidade de termos que precederem o primeiro deles for igual à quantidade de termos que sucederem ao outro termo. Assim, na sucessão:
$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_p, \ldots, a_k, \ldots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$, temos:
a_2 e a_{n-1} são termos equidistantes dos extremos;
a_3 e a_{n-2} são termos equidistantes dos extremos;
a_4 a_{n-3} são termos equidistantes dos extremos.

Notemos que sempre que dois termos são equidistantes dos extremos, a soma dos seus índices é igual ao valor de n + 1. Assim sendo, podemos generalizar que, se os termos a_p e a_k são equidistantes dos extremos, então: p + k = n+1.

Propriedade

Numa PA com *n* termos, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma destes extremos.

Exemplo

Sejam, numa PA de n termos, a_p e a_k termos equidistantes dos extremos.

Teremos, então:
I - $a_p = a_1 + (p - 1) . r \Rightarrow ap = a_1 + p . r - r$
II - $a_k = a_1 + (k - 1) . r \Rightarrow ak = a_1 + k . r - r$
Fazendo I + II, teremos:
$A_p + a_k = a_1 + p . r - r + a_1 + k . r - r$
$A_p + a_k = a_1 + a_1 + (p + k - 1 - 1) . r$

Considerando que p + k = n + 1, ficamos com:
$a_p + a_k = a_1 + a_1 + (n + 1 - 1) . r$
$a_p + a_k = a_1 + a_1 + (n - 1) . r$
$a_p + a_k = a_1 + a_n$

Portanto numa PA com *n* termos, em que *n* é um numero ímpar, o termo médios (a_m) é a media aritmética dos extremos. $A_m = \frac{a_1 + a_n}{2}$

7. Soma dos *n* Primeiros Termos de uma PA

Vamos considerar a PA $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ e representar por Sn a soma dos seus n termos, ou seja:
$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$
(igualdade I)

Podemos escrever também:
$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$
(igualdade II)

Somando-se I e II, temos:
$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$

Considerando que todas estas parcelas, colocadas entre parênteses, são formadas por termos equidistantes dos extremos e que a soma destes termos é igual à soma dos extremos, temos:

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) \rightarrow 2S_n = (a_1 + a_n) . n$

E, assim, finalmente:

$$Sn = \frac{(a1 + an).n}{2}$$

Exemplo

- Ache a soma dos sessenta primeiros termos da PA (2 , 5, 8,...).

Dados: $a_1 = 2$
$r = 5 - 2 = 3$

Calculo de a_{60}:
$A_{60} = a_1 + 59r \rightarrow a_{60} = 2 + 59 . 3$
$a_{60} = 2 + 177$
$a_{60} = 179$

Calculo da soma:
$S_n = \frac{(a_1 + a_n) n}{2} \rightarrow S_{60} = \frac{(a_1 + a_{60}) . 60}{2}$

$S_{60} = \frac{(2 + 179) . 60}{2}$

$S_{60} = 5430$
Resposta: 5430

GRUPO NOVA

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PG)

PG é uma sequência numérica onde cada termo, a partir do segundo, é o anterior multiplicado por uma constante q chamada razão da PG.

$a_{n+1} = a_n \cdot q$

Com a_1 conhecido e n € N*

Exemplos

- (3, 6, 12, 24, 48,...) é uma PG de primeiro termo $a_1 = 3$ e razão q = 2.

- (-36, -18, -9, $\frac{-9}{2}$, $\frac{-9}{4}$,...) é uma PG de primeiro termo a_1= -36 e razão q = $\frac{1}{2}$.

- (15, 5, $\frac{5}{3}$, $\frac{5}{9}$,...) é uma PG de primeiro termo a_1 = 15 e razão q = $\frac{1}{3}$.

- (-2, -6, -18, -54, ...) é uma PG de primeiro termo a_1 = -2 e razão q = 3.

- (1, -3, 9, -27, 81, -243, ...) é uma PG de primeiro termo a_1 = 1 e razão q = -3.

- (5, 5, 5, 5, 5, 5,...) é uma PG de primeiro termo a_1 = 5 e razão q = 1.

- (7, 0, 0, 0, 0, 0,...) é uma PG de primeiro termo a_1 = 7 e razão q = 0.

- (0, 0, 0, 0, 0, 0,...) é uma PG de primeiro termo a_1 = 0 e razão q qualquer.

Observação: Para determinar a razão de uma PG, basta efetuar o quociente entre dois termos consecutivos: o posterior dividido pelo anterior.

$$q = \frac{a_n+1}{a_n} \quad (a_n \neq 0)$$

Classificação

As classificações geométricas são classificadas assim:

- Crescente: Quando cada termo é maior que o anterior. Isto ocorre quando $a_1 > 0$ e $q > 1$ ou quando $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$.
- Decrescente: Quando cada termo é menor que o anterior. Isto ocorre quando $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou quando $a_1 < 0$ e $q > 1$.
- Alternante: Quando cada termo apresenta sinal contrario ao do anterior. Isto ocorre quando $q < 0$.
- Constante: Quando todos os termos são iguais. Isto ocorre quando q = 1. Uma PG constante é também uma PA de razão r = 0. A PG constante é também chamada de PG estacionaria.
- Singular: Quando zero é um dos seus termos. Isto ocorre quando $a_1 = 0$ ou q = 0.

Formula do Termo Geral

A definição de PG está sendo apresentada por meio de uma lei de recorrências, e nos já aprendemos nos módulos anteriores que a formula do termo geral é mais pratica. Por isso, estaremos, neste item, procurando estabelecer, a partir da lei de recorrências, a fórmula do termo geral da progressão geométrica.

Vamos considerar uma PG de primeiro termo a1 e razão q. Assim, teremos:

$a_2 = a_1 \cdot q$
$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$
$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3$
$a_5 = a_4 \cdot q = a_1 \cdot q^4$
. .
. .
. .
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Exemplos

- Numa PG de primeiro termo $a_1 = 2$ e razão q = 3, temos o termo geral na igual a:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

Assim, se quisermos determinar o termo a_5 desta PG, faremos:

$A_5 = 2 \cdot 3^4 \rightarrow a^5 = 162$

- Numa PG de termo $a_1 = 15$ e razão q = $\frac{1}{3}$, temos o termo geral na igual a:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow a_n = 15 \cdot \frac{1}{3}^{n-1}$

Assim, se quisermos determinar o termo a_6 desta PG, faremos:

$A_6 = 15 \cdot \frac{(1) \cdot 5}{2} \rightarrow a_6 = \frac{5}{81}$

- Numa PG de primeiro termo $a_1 = 1$ e razão = -3 temos o termo geral na igual a:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow a_n = 1 \cdot (-3)^{n-1}$

Assim, se quisermos determinar o termo a_4 desta PG, faremos:

$A_4 = 1 \cdot (-3)^3 \rightarrow a_4 = -27$

Artifícios de Resolução

Em diversas situações, quando fazemos uso de apenas alguns elementos da PG, é possível através de alguns elementos de resolução, tornar o procedimento mais simples.

PG com três termos:

$\frac{a}{q}$; a; aq

PG com quatro termos:

$\frac{a}{q^3}$; $\frac{a}{q}$; aq; aq^3

PG com cinco termos:

$\frac{a}{q^2}$; $\frac{a}{q}$; a; aq; aq^2

Exemplo

Considere uma PG crescente formada de três números. Determine esta PG sabendo que a soma destes números é 13 e o produto é 27.

Vamos considerar a PG em questão formada pelos termos a, b e c, onde a = $\frac{b}{q}$ e c = b . q.

Assim,

$\frac{b}{q}$. b . bq = 27 → b^3 = 27 → b = 3.

Temos:

$\frac{3}{q}$ + 3 +3q = 13 → $3q^2 - 10q + 3 = 0 \Rightarrow$

q = 3 ou q = $\frac{1}{3}$

Sendo a PG crescente, consideramos apenas q = 3. E, assim, a nossa PG é dada pelos números: 1, 3 e 9.

Propriedades

P_1: Para três termos consecutivos de uma PG, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos outros dois.

Exemplo

Vamos considerar três termos consecutivos de uma PG: a_{n-1}, a_n e a_{n+1}. Podemos afirmar que:

I – $a_n = a_{n-1} . q$ e

II – $a_n = \frac{a_{n+1}}{q}$

Fazendo I . II, obteremos:

$(a_n)^2 = (a_{n-1} . q) . (\frac{a_{n+1}}{q}) \Rightarrow (a_n)^2 = a_{n-1} . a_{n+1}$

Logo: $(a_n)^2 = a_{n-1} . a_{n+1}$

Observação: Se a PG for positiva, o termo médio será a media geométrica dos outros dois:

$an = \sqrt{an_{-1}.an_{+1}}$

P_2: Numa PG, com n termos, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto destes extremos.

Exemplo

Sejam, numa PG de n termos, a_p e a_k dois termos equidistantes dos extremos.

Teremos, então:
I – $a_p = a_1 . q^{p-1}$
II – $a_k = a_1 . q^{k-1}$

Multiplicando I por II, ficaremos com:

$a_p . a_k = a_1 . q^{p-1} . a_1 . q^{k-1}$
$a_p . a_k = a_1 . a_1 . q^{p-1+k-1}$

Considerando que p + k = n + 1, ficamos com:
$a_p . a_k = a_1 . a_n$

Portanto, numa PG, com n termos, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto destes extremos.

Observação: Numa PG positiva, com *n* termos, onde *n* é um numero impar, o termo médio (a_m) é a media geométrica dos extremos ou de 2 termos equidistantes dos extremos.

$a_m = \sqrt{a_1 . a_n}$

Soma dos termos de uma PG

Soma dos *n* Primeiros Termos de uma PG

Vamos considerar a PG (a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n), com q diferente de 1 e representar por Sn a soma dos seus n termos, ou seja:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$
(igualdade I)

GRUPO NOVA

Podemos escrever, multiplicando-se, membro a membro, a igualdade (I) por q:

$q \cdot S_n = q \cdot a_1 + q \cdot a_2 + q \cdot a_3 + ... + q \cdot a_{n-2} +$
$+ q \cdot a_{n-1} + q \cdot a_n$

Utilizando a formula do termo geral da PG, ou seja, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, teremos:

$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + a1 \cdot q^n$
(igualdade II)

Subtraindo-se a equação I da equação II, teremos:

$q \cdot S_n - S_n = a_1 \cdot q^n - a_1 \rightarrow s_n \cdot (q - 1) =$
$= a_1 \cdot (q^n - 1)$

E assim: $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$

Se tivéssemos efetuado a subtração das equações em ordem inversa, a fórmula da soma dos termos da PG ficaria:

$S_n = \dfrac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$

Evidentemente que por qualquer um dos "caminhos" o resultado final é o mesmo. É somente uma questão de forma de apresentação.

Observação: Para q = 1, teremos $s_n = n \cdot a_1$

Série Convergente – PG Convergente

Dada a sequência ($a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$), chamamos de serie a sequência $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, ..., S_{n-2}, s_{n-1}, s_n$, tal que:

$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$
$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$
.
.
.
$S_{n-2} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ... + a_{n-2}$
$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ... + a_{n-2} + a_{n-1}$
$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

Vamos observar como exemplo, numa PG com primeiro termo $a_1 = 4$ e razão $q = \frac{1}{2}$, à série que ela vai gerar.

Os termos que vão determinar a progressão geométrica são: $(4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}, ...)$

E, portanto, a série correspondente será:

$S_1 = 4$
$S_2 = 4 + 2 = 6$
$S_3 = 4 + 2 + 1 = 7$

$S_4 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{15}{2} = 7,5$

$S_5 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{31}{4} = 7,75$

$S_6 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{63}{8} = 7,875$

$S_7 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{127}{16} = 7,9375$

$S_8 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{255}{32} = 7,96875$

$S_9 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{511}{64} = 7,984375$

$S_{10} = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} = \frac{1023}{128} = 7,9921875$

Devemos notar que a cada novo termo calculado, na PG, o seu valor numérico cada vez mais se aproxima de zero. Dizemos que esta é uma progressão geométrica convergente.

Por outro lado, na serie, é cada vez menor a parcela que se acrescenta. Desta forma, o ultimo termos da serie vai tendendo a um valor que parece ser o limite para a série em estudo. No exemplo numérico, estudado anteriormente, nota-se claramente que este valor limite é o numero 8.

Bem, vamos dar a esta discussão um caráter matemático.

É claro que, para a PG ser convergente, é necessário que cada termo seja, um valor absoluto, inferior ao anterior a ele. Assim, temos que:

PG convergente $\rightarrow |q| < 1$

ou

PG convergente $\rightarrow -1 < 1$

Resta estabelecermos o limite da serie, que é o S_n para quando *n* tende ao infinito, ou seja, estabelecermos a soma dos infinitos termos da PG convergente.

Vamos partir da soma dos *n* primeiros termos da PG:

$S_n = \dfrac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$

Estando q entre os números -1e 1 e, sendo n um expoente que tende a um valor muito grande, pois estamos somando os infinitos termos desta PG, é fácil

deduzir que q^n vai apresentando um valor cada vez mais próximo de zero. Para valores extremamente grandes de *n* não constitui erro considerar que q^n é igual a zero. E, assim, teremos:

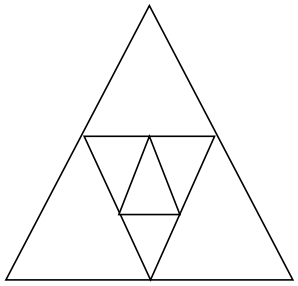
$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

Observação: Quando a PG é não singular (sequência com termos não nulos) e a razão q é de tal forma que $q \mid \geq 1$, a serie é divergente. Séries divergentes não apresentam soma finita.

Exemplos

- A medida do lado de um triângulo equilátero é 10. Unindo-se os pontos médios de seus lados, obtém-se o segundo triângulo equilátero. Unindo-se os pontos médios dos lados deste novo triangulo equilátero, obtém-se um terceiro, e assim por diante, indefinidamente. Calcule a soma dos perímetros de todos esses triângulos.

Solução:



Temos: perímetro do 1º triangulo = 30

perímetro do 2º triangulo = 15

perímetro do 3º triangulo = $\frac{15}{2}$

Logo, devemos calcular a soma dos termos da PG infinita 30, 15, $\frac{15}{2}$,... na qual $a_1 = 30$ e $q = \frac{1}{2}$.

$S = \frac{a_1}{} \rightarrow s = 60.$

Exercícios resolvidos

QUESTÃO 01

Uma progressão aritmética e uma progressão geométrica têm, ambas, o primeiro termo igual a 4, sendo que os seus terceiros termos são estritamente positivos e coincidem. Sabe-se ainda que o segundo termo da progressão aritmética excede o segundo termo da progressão geométrica em 2. Então, o terceiro termo das progressões é:

a) 10
b) 12
c) 14
d) 16
e) 18

QUESTÃO 02

O valor de n que torna a sequência (2 + 3n; –5n; 1 – 4n) uma progressão aritmética pertence ao intervalo:

a) [– 2, –1]
b) [– 1, 0]
c) [0, 1]
d) [1, 2]
e) [2, 3]

QUESTÃO 03

Os termos da sequência (10; 8; 11; 9; 12; 10; 13; ...) obedecem a uma lei de formação. Se a_n, em que *n* pertence a N*, é o termo de ordem *n* dessa sequência, então $a_{30} + a_{55}$ é igual a:

a) 58
b) 59
c) 60
d) 61
e) 62

QUESTÃO 04

A soma dos elementos da sequência numérica infinita (3; 0,9; 0,09; 0,009; ...) é:

a) 3,1
b) 3,9
c) 3,99
d) 3, 999
e) 4

QUESTÃO 05

A soma dos vinte primeiros termos de uma progressão aritmética é -15. A soma do sexto termo dessa PA., com o décimo quinto termo, vale:

a) 3,0
b) 1,0
c) 1,5
d) -1,5
e) -3,0

QUESTÃO 06

Os números que expressam os ângulos de um quadrilátero, estão em progressão geométrica de razão 2. Um desses ângulos mede:

a) 28°
b) 32°
c) 36°
d) 48°
e) 50°

QUESTÃO 07

Sabe-se que S = 9 + 99 + 999 + 9999 + ... + 999...9 onde a última parcela contém n algarismos. Nestas condições, o valor de $10^{n+1} - 9(S + n)$ é:

a) 1
b) 10
c) 100
d) -1
e) -10

QUESTÃO 08

Se a soma dos tres primeiros termos de uma PG decrescente é 39 e o seu produto é 729, então sendo a, b e c os tres primeiros termos, pede-se calcular o valor de $a^2 + b^2 + c^2$.

QUESTÃO 09

O limite da expressão $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}}}$ onde x é positivo, quando o número de radicais aumenta indefinidamente é igual a:

a) 1/x
b) x
c) 2x
d) n.x
e) 1978x

QUESTÃO 10

Quantos números inteiros existem, de 1000 a 10000, que não são divisíveis nem por 5 nem por 7 ?

Resoluções

1) Resposta "D".

Solução:

Sejam $(a_1, a_2, a_3,\ldots)$ a PA de r e $(g_1, g_2, g_3, \ldots)$ a PG de razão *q*. Temos como condições iniciais:

1 - $a_1 = g_1 = 4$
2 - $a_3 > 0$, $g_3 > 0$ e $a_3 = g_3$
3 - $a_2 = g_2 + 2$

Reescrevendo (2) e (3) utilizando as fórmulas gerais dos termos de uma PA e de uma PG e (1) obtemos o seguinte sistema de equações:

4 - $a_3 = a_1 + 2r$ e $g_3 = g_1 . q^2 \rightarrow 4 + 2r = 4q^2$
5 - $a_2 = a_1 + r$ e $g_2 = g_1 . q \rightarrow 4 + r = 4q + 2$

Expressando, a partir da equação (5), o valor de *r* em função de ***q*** e substituindo ***r*** em (4) vem:

$5 - r = 4q + 2 - 4 \rightarrow r = 4q - 2$
$4 - 4 + 2(4q - 2) = 4q^2 \rightarrow 4 + 8q - 4 = 4q^2 \rightarrow 4q^2 - 8q = 0$
$\rightarrow q(4q - 8) = 0 \rightarrow q = 0$ ou $4q - 8 = 0 \rightarrow q = 2$

Como g3 > 0, *q* não pode ser zero e então q = 2. Para obter *r* basta substituir *q* na equação (5):

$r = 4q - 2 \rightarrow r = 8 - 2 = 6$

Para concluir calculamos a_3 e g_3:

$a_3 = a_1 + 2r \rightarrow a_3 = 4 + 12 = 16$
$g_3 = g_1.q^2 \rightarrow g_3 = 4.4 = 16$

2) Resposta "B".

Solução: Para que a sequência se torne uma PA de razão *r* é necessário que seus três termos satisfaçam as igualdades (aplicação da definição de PA):

(1) $-5n = 2 + 3n + r$
(2) $1 - 4n = -5n + r$

Determinando o valor de **r** em (1) e substituindo em (2):

(1) $\rightarrow r = -5n - 2 - 3n = -8n - 2$
(2) $\rightarrow 1 - 4n = -5n - 8n - 2 \rightarrow 1 - 4n = -13n - 2$
$\rightarrow 13n - 4n = -2 - 1 \rightarrow 9n = -3 \rightarrow n = -3/9 = -1/3$

Ou seja, $-1 < n < 0$ e, portanto, a resposta correta é a b.

3) Resposta "B".

Solução: Primeiro, observe que os termos ímpares da sequência é uma PA de razão 1 e primeiro termo 10 - (10; 11; 12; 13; ...). Da mesma forma os termos pares é uma PA de razão 1 e primeiro termo igual a 8 - (8; 9; 10; 11; ...).

Assim, as duas PA têm como termo geral o seguinte formato:

(1) ai = a1 + (i - 1).1 = a1 + i – 1

Para determinar $a_{30} + a_{55}$ precisamos estabelecer a regra geral de formação da sequência, que está intrinsecamente relacionada às duas progressões da seguinte forma:

- Se n (índice da sucessão) é impar temos que n = 2i - 1, ou seja, i = (n + 1)/2;
- Se n é par temos n = 2i ou i = n/2.

Daqui e de (1) obtemos que:

$a_n = 10 + [(n + 1)/2] - 1$ se n é ímpar
$a_n = 8 + (n/2) - 1$ se n é par

Logo:

$a_{30} = 8 + (30/2) - 1 = 8 + 15 - 1 = 22$ e
$a_{55} = 10 + [(55 + 1)/2] - 1 = 37$

E, portanto:

$a_{30} + a_{55} = 22 + 37 = 59$.

4) Resposta "E".

Solução: Sejam S as somas dos elementos da sequência e S_1 a soma da PG infinita (0,9; 0,09; 0,009;...) de razão q = 10 - 1 = 0,1. Assim:

$S = 3 + S_1$

Como $-1 < q < 1$ podemos aplicar a fórmula da soma de uma PG infinita para obter S_1:

$S_1 = 0{,}9/(1 - 0{,}1) = 0{,}9/0{,}9 = 1 \rightarrow S = 3 + 1 = 4$

5) Resposta "D".

Solução: Aplicando a fórmula da soma dos 20 primeiros termos da PA:

$S_{20} = 20(a_1 + a_{20})/2 = -15$

Na PA finita de 20 termos, o sexto e o décimo quinto são equidistantes dos extremos, uma vez que:

$15 + 6 = 20 + 1 = 21$

E, portanto:

$a_6 + a_{15} = a_1 + a_{20}$

Substituindo este valor na primeira igualdade vem:

$20(a_6 + a_{15})/2 = -15 \rightarrow 10(a6 + a15) = -15 \rightarrow a_6 + a_{15} = -15/10 = -1{,}5$.

6) Resposta "D".

Solução: Seja x o menor ângulo interno do quadrilátero em questão. Como os ângulos estão em Progressão Geométrica de razão 2, podemos escrever a PG de 4 termos:

(x, 2x, 4x, 8x**).**

Ora, a soma dos ângulos internos de um quadrilátero vale 360º.

Logo,

$x + 2x + 4x + 8x = 360º$

$15.x = 360º$

Portanto, x = 24º. Os ângulos do quadrilátero são, portanto: 24º, 48º, 96º e 192º. O problema pede um dos ângulos. Logo, alternativa D.

7) Resposta "B".

Solução: Observe que podemos escrever a soma S como:

$S = (10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + (10000 - 1) + ... + (10^n - 1)$

$S = (10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + (10^4 - 1) + ... + (10^n - 1)$

Como existem n parcelas, observe que o número (– 1) é somado n vezes, resultando em n(-1) = **- n.**

Logo, poderemos escrever:

$S = (10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + ... + 10^n) - n$

Vamos calcular a soma $S_n = 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + ... + 10^n$, que é uma PG de primeiro termo $a_1 = 10$, razão q = 10 e último termo $a_n = 10^n$.

Teremos:

$S_n = (a_n.q - a_1) / (q - 1) = (10^n . 10 - 10) / (10 - 1) = (10^{n+1} - 10) / 9$

Substituindo em S, vem:

$S = [(10^{n+1} - 10) / 9] - n$

Deseja-se calcular o valor de $10^{n+1} - 9(S + n)$

Temos que $S + n = [(10^{n+1} - 10) / 9] - n + n = (10^{n+1} - 10) / 9$

Substituindo o valor de S + n encontrado acima, fica:

$10^{n+1} - 9(S + n) = 10^{n+1} - 9(10^{n+1} - 10) / 9 = 10^{n+1} - (10^{n+1} - 10) =$ **10.**

8) Resposta "819".

Solução: Sendo q a razão da PG, poderemos escrever a sua forma genérica: (x/q, x, xq).

Como o produto dos 3 termos vale 729, vem:

$x/q . x . xq = 729$ de onde concluímos que: $x^3 = 729 = 3^6 = 3^3 . 3^3 = 9^3$, logo, x = 9.

Portanto a PG é do tipo: 9/q, 9, 9q

É dado que a soma dos 3 termos vale 39, logo:

$9/q + 9 + 9q = 39$ de onde vem: $9/q + 9q - 30 = 0$

Multiplicando ambos os membros por q, fica: $9 + 9q^2 - 30q = 0$

Dividindo por 3 e ordenando, fica: $3q^2 - 10q + 3 = 0$, que é uma equação do segundo grau. Resolvendo a equação do segundo grau acima encontraremos q = 3 ou q = 1/3.

Como é dito que a PG é decrescente, devemos considerar apenas o valor q = 1/3, já que para q = 3, a PG seria crescente.

Portanto, a PG é: 9/q, 9, 9q, ou substituindo o valor de q vem: 27, 9, 3.

O problema pede a soma dos quadrados, logo:

$a^2 + b^2 + c^2 = 27^2 + 9^2 + 3^2 = 729 + 81 + 9 =$ **819.**

9) Resposta "B".

Solução: Observe que a expressão dada pode ser escrita como:

$x^{1/2}. x^{1/4} . x^{1/8} . x^{1/16} . ... = x^{1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ...}$

O expoente é a soma dos termos de uma PG infinita de primeiro termo $a_1 = 1/2$ e razão q = 1/2.

Logo, a soma valerá:

$S = a_1 / (1 - q) = (1/2) / 1 - (1/2) = 1$

Então, $x^{1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ...} = x^1 =$ **x**

10) Resposta "6171".
Solução: Dados:
M(5) = 1000, 1005, ..., 9995, 10000.
M(7) = 1001, 1008, ..., 9996.
M(35) = 1015, 1050, ... , 9975.
M(1) = 1, 2, ..., 10000.

Para múltiplos de 5, temos: $a_n = a1 + (n-1).r \rightarrow 10000 = 1000 + (n - 1).5 \rightarrow n = 9005/5 \rightarrow n = 1801$.
Para múltiplos de 7, temos: $a_n = a1 + (n-1).r \rightarrow 9996 = 1001 + (n - 1).7 \rightarrow n = 9002/7 \rightarrow n = 1286$.
Para múltiplos de 35, temos: $a_n = a1 + (n - 1).r \rightarrow 9975 = 1015 + (n - 1).35 \rightarrow n = 8995/35 \rightarrow n = 257$.
Para múltiplos de 1, temos: $a_n = a1 = (n -1).r \rightarrow 10000 = 1000 + (n - 1).1 \rightarrow n = 9001$.

Sabemos que os múltiplos de 35 são múltiplos comuns de 5 e 7, isto é, eles aparecem no conjunto dos múltiplos de 5 e no conjunto dos múltiplos de 7 (daí adicionarmos uma vez tal conjunto de múltiplos).
Total = M(1) - M(5) - M(7) + M(35).
Total = 9001 - 1801 - 1286 + 257 = 6171

ANÁLISE COMBINATÓRIA

A matemática estuda, em particular, três técnicas de contagem:

- **Arranjo**: a ordem dos elementos é importante.

- **Combinação**: a ordem dos elementos não importa.

- **Permutação**: é a mudança na ordem dentro de um arranjo.

Fórmulas:

- Sendo **n** o total de elementos e **k** o número de elementos utilizados, temos (fórmulas de arranjo, combinação e permutação simples), a fórmula de arranjo é pouco utilizada:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$P_n = n!$$

Exercícios resolvidos

QUESTÃO 01
Quantos números diferentes e de três algarismos distintos existem no sistema decimal de numeração?

QUESTÃO 02
Quantos números diferentes e de três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 5, 7 e 8?

QUESTÃO 03
Quantos são os anagramas da palavra BONITA?

QUESTÃO 04
Quantos são os anagramas da palavra BONITA que começam com vogal e terminam por consoante?

QUESTÃO 05
Quantos anagramas da palavra REPITO tem as letras REP juntas?

QUESTÃO 06
Quantos anagramas da palavra REPITO tem as letras REP juntas e nessa ordem?

QUESTÃO 07
Num plano são dados 10 pontos, três a três não colineares. Pergunta-se:
a) Qual o número total de retas determinadas por esses pontos?
b) Qual o número total de triângulos com vértices nesses pontos?

QUESTÃO 08
Cada seleção participante da copa do mundo de futebol inscreve 23 jogadores, sendo necessariamente três goleiros. Em cada partida, dois jogadores de cada seleção são escolhidos entre 0s 23 inscritos para o exame anti-doping, mas são descartadas as possibilidades de que os dois jogadores escolhidos sejam goleiros. De quantas maneiras possíveis estes dois jogadores podem ser escolhidos?

QUESTÃO 09
(ENEM) Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o grupo A. Em seguida, entre os times do grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio

campo e o segundo seria o time visitante. A quantidade total de escolhas possíveis para o grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser, respectivamente, calculadas através de:

a) Um arranjo e uma combinação.
b) Uma combinação e um arranjo.
c) Um arranjo e uma permutação.
d) Duas combinações.
e) Dois arranjos.

QUESTÃO 10

(ENEM) Uma família de 5 pessoas possui um automóvel de 5 lugares. Se apenas uma pessoa dirige, de quantas maneiras diferentes os passageiros podem se acomodar no carro para uma viagem?

a) 6
b) 12
c) 24
d) 36
e) 120

Resoluções

01- **Resposta: 648**

Solução: como temos 10 algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9; e os números com três algarismos distintos não podem começar por **zero**, temos:

- 9 chances para escolher o algarismo das centenas (excluindo o zero).
- 9 chances para escolher o algarismo das dezenas (excluindo o algarismo escolhidos para a centena e pode colocar o zero).
- 8 chances para o algarismo das unidades.

Então: 9.9.8 = 648

02- **Resposta: 120**

Solução: temos 6 algarismo.

- 6 chances para escolher o algarismo das centenas.
- 5 chances para escolher o algarismo das dezenas.
- 4 chances para escolher o algarismo das unidades.

Então: 6.5.4 = 120

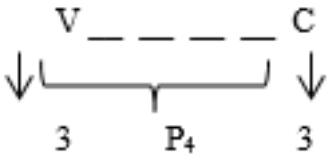
03- **Resposta 720**

Solução: anagramas são palavras com ou sem sentido formadas com as letras de uma palavra dada. A palavra BONITA tem 6 letras, logo, temos uma permutação de 6.

$P_6 = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$

04- **Resposta: 216**

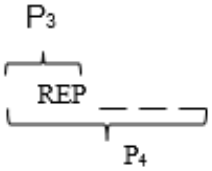
Solução: a palavra BONITA tem 3 vogais e consoantes.



$3.3.P_4 = 9.4! = 9.4.3.2.1 = 216$

05- **Resposta: 144**

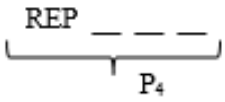
Solução: a palavra REPITO tem 6 letras, como as letras REP tem que ficar juntas consideramos como se fosse uma só letra. Só que as letras REP podem permutar também.



$P_4.P_3 = 4!.3! = 4.3.2.1.3.2.1 = 144$

06- **Resposta: 24**

Solução: a palavra REPITO tem 6 letras, como as letras REP tem que ficar juntas consideramos como se fosse uma só letra. Só que as letras REP não podem permutar, estão sempre na mesma ordem.



$P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$

07- **Respostas: item a) 45 e item b) 120**

Solução:

a) para determinar uma reta temos que unir 2 pontos dos 10 pontos dados e a ordem não é importante, portanto é uma combinação.

$$C_{10,2} = \frac{10!}{2!.(10-2)!} = \frac{10.9.8!}{2.1.8!} = \frac{90}{2} = 45 \text{ retas.}$$

b) para determinar um triângulo temos que unir três pontos dos 10 pontos dados e a ordem não é importante, portanto é uma combinação.

$$C_{10,3} = \frac{10!}{3!.(10-3)!} = \frac{10.9.8.7!}{3.2.1.7!} = \frac{720}{6} = 120 \text{ triângulos.}$$

08- **Resposta: 250**

Solução: para escolher os dois jogadores a ordem do sorteio não é importante. Escolher o João e o José ou o José e o João é a mesma coisa. Logo temos uma combinação dos 23 jogadores, porém temos que descontar a possibilidade de escolher 2 goleiros, então temos uma combinação dos 3 goleiros.

$$C_{23,2} - C_{3,2} = \frac{23!}{2!.(23-2)!} - \frac{3!}{2!.(3-2)!} =$$

$$= \frac{23.22.21!}{2.1.21!} - \frac{3.2!}{2!.1!} = \frac{506}{2} - 3 = 253 - 3 = 250 \text{ maneiras diferentes.}$$

09- **Resposta: b**

Solução: para escolher os quatro clubes das chaves a ordem não é importante, pois a chave será a mesma, logo é **combinação**. Para escolher os dois times que farão o jogo de abertura a ordem é importante, pois o primeiro clube sorteado será o mandante, logo é **arranjo**.

10- **Resposta: 24**

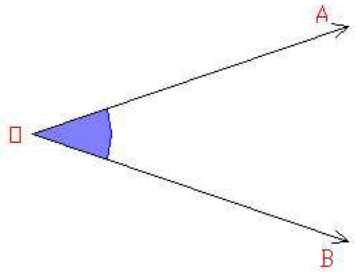
Solução: como somente uma pessoa pode dirigir, nós temos uma permutação das outras 4 pessoas.

$P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$

• CONHECIMENTOS GEOMÉTRICOS – CARACTERÍSTICAS DAS FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS E ESPACIAIS; GRANDEZAS, UNIDADES DE MEDIDA E ESCALAS; COMPRIMENTOS, ÁREAS E VOLUMES; ÂNGULOS; POSIÇÕES DE RETAS; SIMETRIAS DE FIGURAS PLANAS OU ESPACIAIS; CONGRUÊNCIA E SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS; TEOREMA DE TALES; RELAÇÕES MÉTRICAS NOS TRIÂNGULOS; CIRCUNFERÊNCIAS; TRIGONOMETRIA DO ÂNGULO AGUDO.

Ângulos

Ângulo: É uma região limitada por duas semirretas de mesma origem.



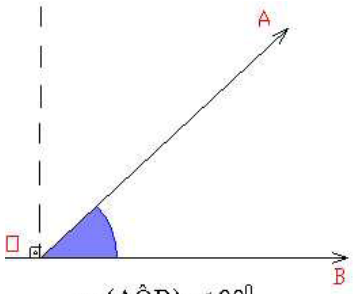
Notação: AÔB
Lê-se ângulo AOB

Elementos de um ângulo:

- LADOS: são as duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

-VÉRTICE: é o ponto de intersecção das duas semirretas, no exemplo o ponto O.

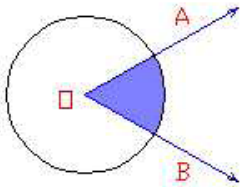
Ângulo Agudo: É o ângulo, cuja medida é **menor** do que 90º.

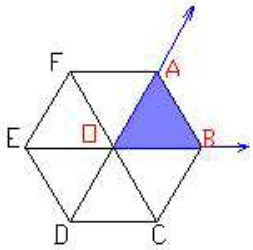


m (AÔB) $< 90^0$

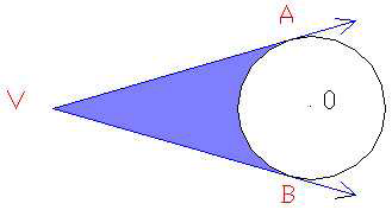
Ângulo Central:

- Da circunferência: é o ângulo cujo **vértice é o centro** da circunferência;
- Do polígono: é o ângulo, cujo **vértice é o centro do polígono regular** e cujos lados passam por **vértices consecutivos** do polígono.

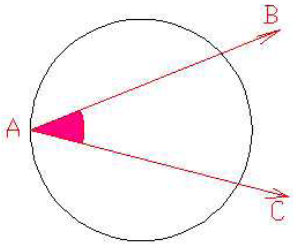




Ângulo Circunscrito: É o ângulo, cujo vértice **não pertence à circunferência** e os lados são **tangentes** a ela.

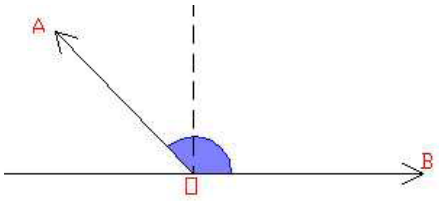


Ângulo Inscrito: É o ângulo cujo **vértice pertence a uma circunferência**.



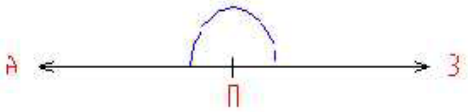
BÂC - ângulo inscrito

Ângulo Obtuso: É o ângulo cuja medida é **maior** do que 90º.



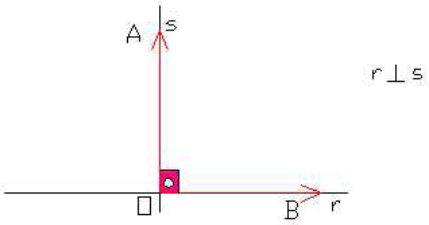
Ângulo Raso:

- É o ângulo cuja medida é 180º;
- É aquele, cujos lados são semirretas opostas.

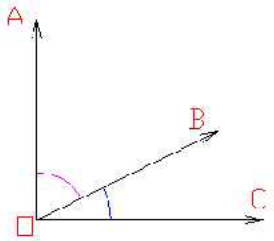


Ângulo Reto:

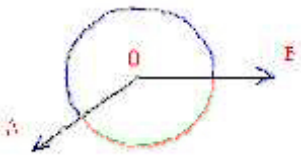
- É o ângulo cuja medida é 90º;
- É aquele cujos lados se apoiam em retas perpendiculares.



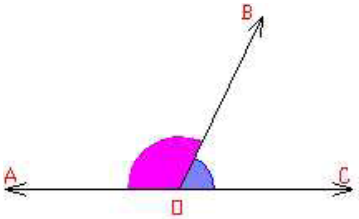
Ângulos Complementares: Dois ângulos são complementares se a soma das suas medidas é 90^0.



Ângulos Replementares: Dois ângulos são ditos replementares se a soma das suas medidas é 360^0.

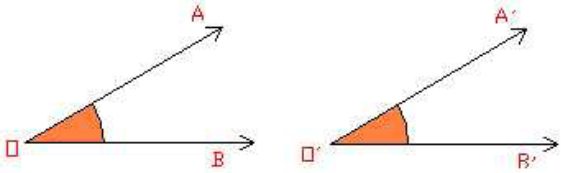


Ângulos Suplementares: Dois ângulos são ditos suplementares se a soma das suas medidas de dois ângulos é 180º.

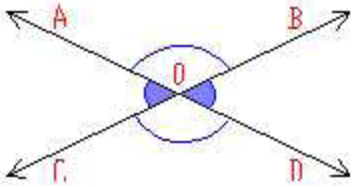


Então, se **x** e **y** são dois ângulos, temos:
- se x + y = 90° ➔ x e y são Complementares.
- se x + y = 180° ➔ x e y são Suplementares.
- se x + y = 360° ➔ x e y são Replementares.

Ângulos Congruentes: São ângulos que possuem a mesma medida.

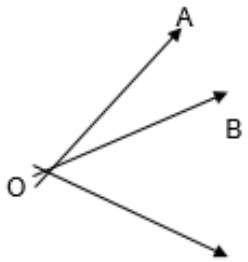


Ângulos Opostos pelo Vértice: Dois ângulos são opostos pelo vértice se os lados de um são as respectivas semirretas opostas aos lados do outro. Ângulos opostos pelo vértice são obrigatoriamente congruentes.



Ângulos consecutivos: são ângulos que tem um lado em comum.

Ângulos adjacentes: são ângulos consecutivos que não tem ponto interno em comum.



Na figura ao lado:
- Os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$, $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$, $B\hat{O}C$ e $A\hat{O}C$ são pares de ângulos consecutivos.
- Os ângulos $A\hat{O}B$ e $BO\hat{O}C$ são ângulos adjacentes.

Unidades de medida de ângulos:

Grado: (gr.): dividindo a circunferência em 400 partes iguais, a cada arco unitário que corresponde a 1/400 da circunferência denominamos de grado.

Grau: (°): dividindo a circunferência em 360 partes iguais, cada arco unitário que corresponde a 1/360 da circunferência denominamos de grau.

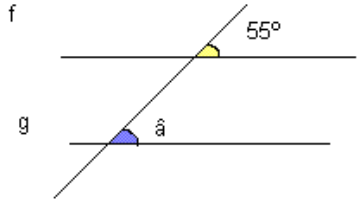
- o grau tem dois submúltiplos: minuto e segundo. E temos que 1° = 60' (1 grau equivale a 60 minutos) e 1' = 60" (1 minuto equivale a 60 segundos).

Exercícios resolvidos

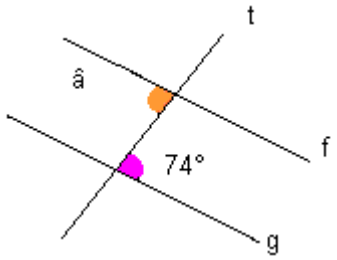
QUESTÃO 01

As retas f e g são paralelas (f // g). Determine a medida do ângulo â, nos seguintes casos:

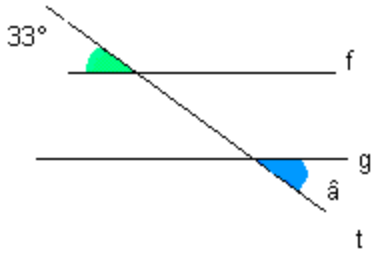
a)



b)

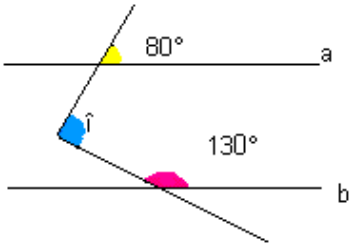


c)



QUESTÃO 02

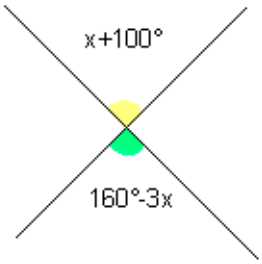
As retas a e b são paralelas. Quanto mede o ângulo î?



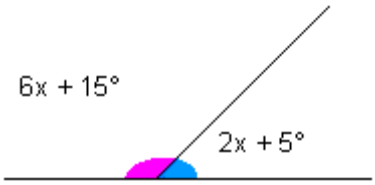
QUESTÃO 03

Obtenha as medidas dos ângulos assinalados:

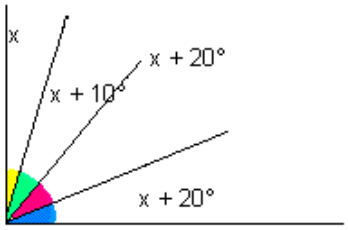
a)



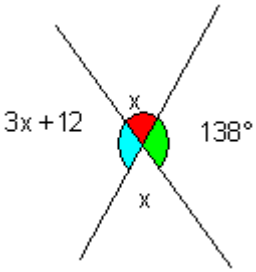
b)



c)



d)



QUESTÃO 04

Quantos segundos tem um ângulo que mede 6° 15'?

QUESTÃO 05

A medida de um ângulo é igual à metade da medida do seu suplemento. Qual é a medida desse ângulo?

QUESTÃO 06

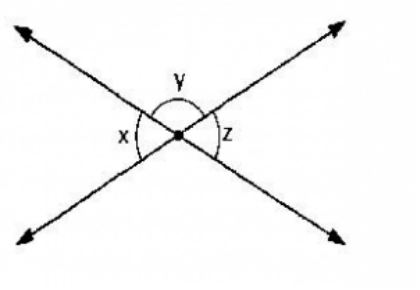
O complemento de um ângulo é igual a um quarto do seu suplemento. Qual é o complemento desse ângulo?

QUESTÃO 07

Dois ângulos que medem x e x + 20° são adjacentes e complementares. Qual a medida desses dois ângulos?

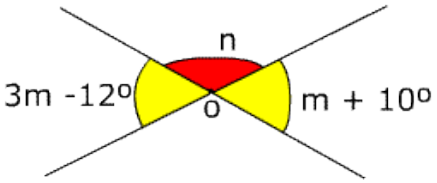
QUESTÃO 08

Na figura, o ângulo x mede a sexta parte do ângulo y, mais a metade do ângulo z. Calcule y.



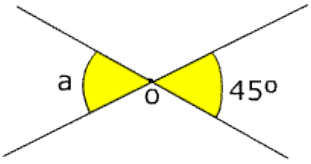
QUESTÃO 09

Observe a figura abaixo e determine o valor de m e n.



QUESTÃO 10

Determine o valor de a na figura seguinte:



Resoluções

1) Resposta

a) 55°

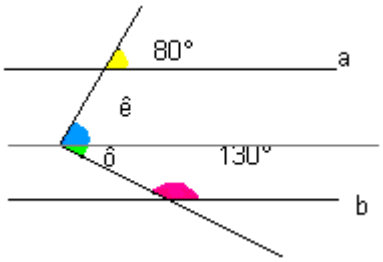
b) 74°

c) 33°

2) Resposta "130".

Solução: Imagine uma linha cortando o ângulo **î**, formando uma linha paralela às retas "a" e "b".

Fica então decomposto nos ângulos **ê** e **ô.**



Sendo assim, **ê = 80°** e **ô = 50°**, pois o ângulo **ô** é igual ao complemento de 130° na reta b.

Logo, î = 80° + 50° = 130°.

3) Solução:

a) 160° - 3x = x + 100°

160° - 100° = x + 3x

60° = 4x

x = 60°/4

x = 15°

Então 15°+100° = 115° e 160°-3*15° = 115°

b) 6x + 15° + 2x + 5° = 180°

6x + 2x = 180° -15° - 5°

8x = 160°

x = 160°/8

x = 20°

Então, 6*20°+15° = **135°** e 2*20°+5° = **45°**

c) Sabemos que a figura tem 90°.

Então x + (x + 10°) + (x + 20°) + (x + 20°) = 90°

4x + 50° = 90°

4x = 40°

x = 40°/4

x = 10°

d) Sabemos que os ângulos laranja + verde formam 180°, pois são exatamente a metade de um círculo.

Então, 138° + x = 180°

x = 180° - 138°

x = 42°

Logo, o ângulo x mede 42°.

4) Resposta 22.500"
Solução:
Sabemos que 1° = 60' e 1' = 60", temos:
6°.60 = 360' (multiplicamos os graus por 60 para converter em minutos).
360' + 15' = 375' (somamos os minutos)
375'.60 = 22.500" (multiplicamos os minutos por 60 para converter em segundos).

Portanto 6° 15' equivale a 22.500".

5) Resposta "60°".
Solução:
- sendo **x** o ângulo, o seu suplemento é 180° - x, então pelo enunciado temos a seguinte equação:

$x = \frac{180° - x}{2}$ (multiplicando em "cruz")

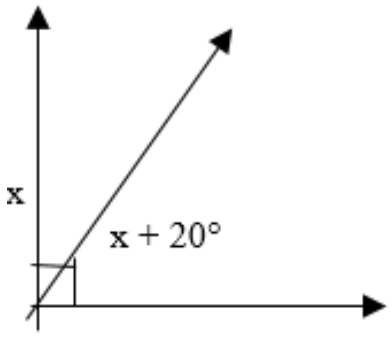
2x = 180° - x
2x + x = 180°
3x = 180°
x = 180° : 3 = 60°

6) Resposta "30°".
Solução:
- sendo **x** o ângulo, o seu complemento será 90° – x e o seu suplemento é 180° – x. Então, temos:

$90° - x = \frac{180° - x}{4}$ (o 4 passa multiplicando o primeiro membro da equação)
4.(90° - x) = 180° - x (aplicando a distributiva)
360° - 4x = 180° - x
360° - 180° = - x + 4x
180° = 3x
x = 180° : 3 = 60°

- o ângulo x mede 60°, o seu complemento é 90° - 60° = 30°

7) Resposta "35° e 55°".
Solução:
- do enunciado temos a seguintes figura:



Então:
x + x + 20° = 90°
2x = 90° - 20°
2x = 70°
x = 70° : 2 = 35°

- os ângulos são: 35° e 35° + 20° = 55°

8) Resposta "135°".
Solução: Na figura, o ângulo x mede a sexta parte do ângulo y, **mais a metade do ângulo z. Calcule y.**
Então vale lembrar que:
x + y = 180 então y = 180 – x.

E também como x e z são opostos pelo vértice, x = z
E de acordo com a figura: o ângulo x mede a sexta parte do ângulo y, **mais a metade do ângulo z. Calcule y.**
x = y/6 + z/2

Agora vamos substituir lembrando que y = 180 - x e x = z
Então:
x = 180° - x/6 + x/2 agora resolvendo fatoração:
6x = 180°- x + 3x | 6x = 180° + 2x
6x – 2x = 180°
4x = 180°
x=180°/4
x=45°

Agora achar y, sabendo que y = 180° - x
y=180° - 45°
y=135°.

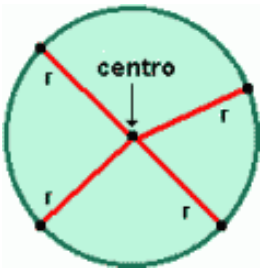
9) Resposta "11°; 159°".
Solução:
3m - 12° e m + 10°, são ângulos opostos pelo vértice logo são iguais.
3m - 12° = m + 10°
3m - m = 10° + 12°
2m = 22°
m = 22°/2
m = 11°
m + 10° e n são ângulos suplementares logo a soma entre eles é igual a 180°.
(m + 10°) + n = 180°
(11° + 10°) + n = 180°
21° + n = 180°
n = 180° - 21°
n = 159°

Resposta: m = 11° e n = 159°.

10) Resposta "45°".
É um ângulo oposto pelo vértice, logo, são ângulos iguais.

CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO

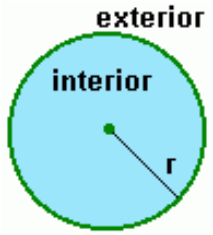
Circunferência: A circunferência é o lugar geométrico de todos os pontos de um plano que estão localizados a uma mesma distância r de um ponto fixo denominado o centro da circunferência. Esta talvez seja a curva mais importante no contexto das aplicações.



Círculo: (ou disco) é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja distância a um ponto fixo O é menor ou igual que uma distância r dada. Quando a distância é nula, o círculo se reduz a um ponto. O círculo é a reunião da circunferência com o conjunto de pontos localizados dentro da mesma. No gráfico acima, a circunferência é a linha de cor verde escuro que envolve a região verde claro, enquanto o círculo é toda a região pintada de verde reunida com a circunferência.

Pontos interiores de um círculo e exteriores a um círculo

Pontos interiores: Os pontos interiores de um círculo são os pontos do círculo que não estão na circunferência.



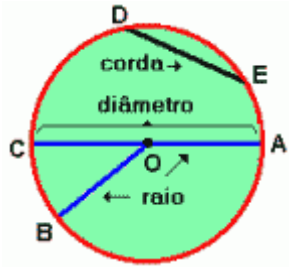
Pontos exteriores: Os pontos exteriores a um círculo são os pontos localizados fora do círculo.

Raio, Corda e Diâmetro

Raio: Raio de uma circunferência (ou de um círculo) é um segmento de reta com uma extremidade no centro da circunferência (ou do círculo) e a outra extremidade num ponto qualquer da circunferência. Na figura abaixo, os segmentos de reta , e são raios.

Corda: Corda de uma circunferência é um segmento de reta cujas extremidades pertencem à circunferência (ou seja, um segmento que une dois pontos de uma circunferência). Na figura abaixo, os segmentos de reta e são cordas.

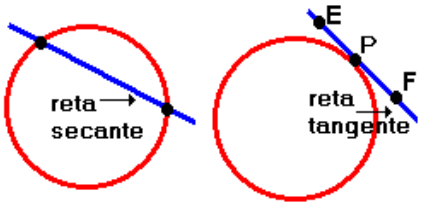
Diâmetro: Diâmetro de uma circunferência (ou de um círculo) é uma corda que passa pelo centro da circunferência. Observamos que o **diâmetro é a maior corda** da circunferência. Na figura abaixo, o segmento de reta é um diâmetro.



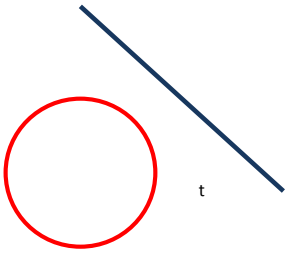
Posições relativas de uma reta e uma circunferência

Reta secante: Uma reta é secante a uma circunferência se essa reta intercepta a circunferência em dois pontos quaisquer, podemos dizer também que é a reta que contém uma corda.

Reta tangente: Uma reta tangente a uma circunferência é uma reta que intercepta a circunferência em um único ponto P. Este ponto é conhecido como ponto de tangência ou ponto de contato. Na figura ao lado, o ponto P é o ponto de tangência e a reta que passa pelos pontos E e F é uma reta tangente à circunferência.

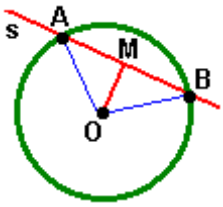


Reta externa (ou exterior): é uma reta que não tem ponto em comum com a circunferência. Na figura abaixo a reta t é externa.

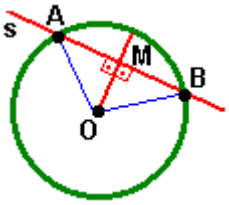


Propriedades das secantes e tangentes

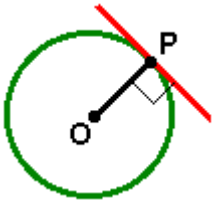
Se uma reta s, secante a uma circunferência de centro O, intercepta a circunferência em dois pontos distintos A e B e se M é o ponto médio da corda AB, então o segmento de reta OM é perpendicular à reta secante s.



Se uma reta s, secante a uma circunferência de centro O, intercepta a circunferência em dois pontos distintos A e B, a perpendicular às retas que passam pelo centro O da circunferência, passa também pelo ponto médio da corda AB.



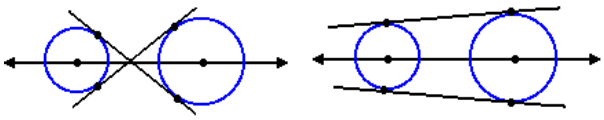
Seja OP um raio de uma circunferência, onde O é o centro e P um ponto da circunferência. Toda reta perpendicular ao raio OP é tangente à circunferência no ponto de tangência P.



Toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

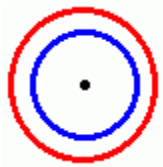
Posições relativas de duas circunferências

Reta tangente comum: Uma reta que é tangente a duas circunferências ao mesmo tempo é denominada uma tangente comum. Há duas possíveis retas tangentes comuns: a interna e a externa.



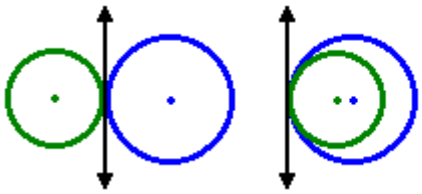
Ao traçar uma reta ligando os centros de duas circunferências no plano, esta reta separa o plano em dois semi-planos. Se os pontos de tangência, um em cada circunferência, estão no mesmo semi-plano, temos uma reta tangente comum externa. Se os pontos de tangência, um em cada circunferência, estão em semi-planos diferentes, temos uma reta tangente comum interna.

Circunferências internas: Uma circunferência C1 é interna a uma circunferência C2, se todos os pontos do círculo C1 estão contidos no círculo C2. Uma circunferência é externa à outra se todos os seus pontos são pontos externos à outra.



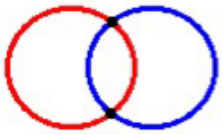
Circunferências concêntricas: Duas ou mais circunferências com o mesmo centro, mas com raios diferentes são circunferências concêntricas.

Circunferências tangentes: Duas circunferências que estão no mesmo plano, são tangentes uma à outra, se elas são tangentes à mesma reta no mesmo ponto de tangência.

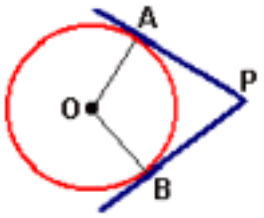


As circunferências são tangentes externas uma à outra se os seus centros estão em lados opostos da reta tangente comum e elas são tangentes internas uma à outra se os seus centros estão do mesmo lado da reta tangente comum.

Circunferências secantes: são aquelas que possuem somente dois pontos distintos em comum.

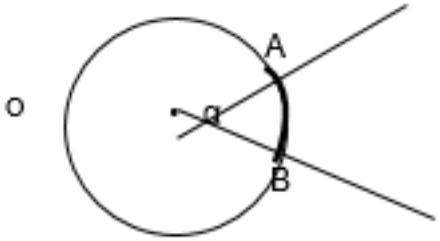


Segmentos tangentes: Se AP e BP são segmentos de reta tangentes à circunferência nos ponto A e B, então esses segmentos AP e BP são congruentes.



ÂNGULOS (OU ARCOS) NA CIRCURFERÊNCIA

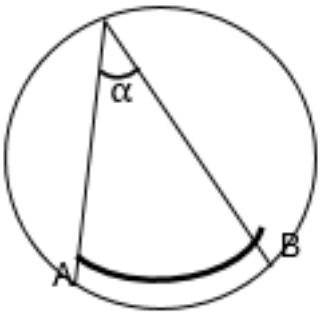
Ângulo central: é um ângulo cujo vértice coincide com o centro da circunferência. Este ângulo determina um arco na circunferência, e a medida do ângulo central e do arco são iguais.



O ângulo central determina na circunferência um arco $\overset{\frown}{AB}$ e sua medida é igual a esse arco.

$$a=\overset{\frown}{AB}$$

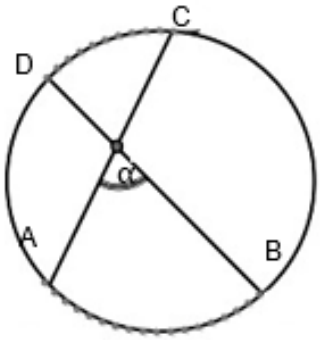
Ângulo Inscrito: é um ângulo cujo vértice está sobre a circunferência.



O ângulo inscrito determina na circunferência um arco $\overset{\frown}{AB}$ e sua medida é igual à metade do arco.

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

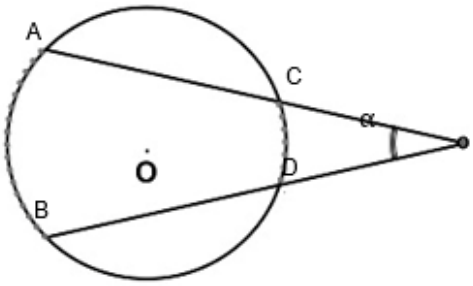
Ângulo Excêntrico Interno: é formado por duas cordas da circunferência.



O ângulo excêntrico interno determina na circunferência dois arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ e sua medida é igual à metade da soma dos dois arcos.

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$$

Ângulo Excêntrico Externo: é formado por duas retas secantes à circunferência.



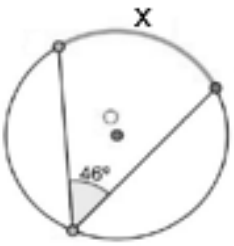
O ângulo excêntrico externo determina na circunferência dois arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ e sua medida é igual à metade da diferença dos dois arcos.

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}$$

Exercícios resolvidos

QUESTÃO 01

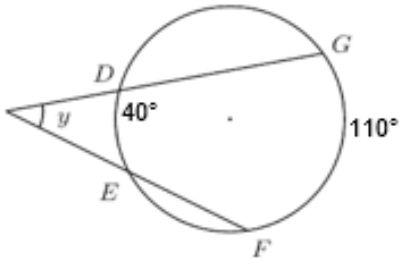
O valor de x na figura abaixo é:



a) 90°
b) 92°
c) 96°
d) 98°
e) 100°

QUESTÃO 02

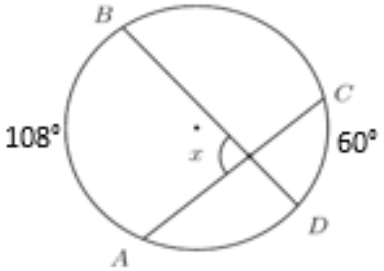
Na figura abaixo, qual é o valor de y?



a) 30°
b) 45°
c) 60°
d) 35°
e) 25°

QUESTÃO 03

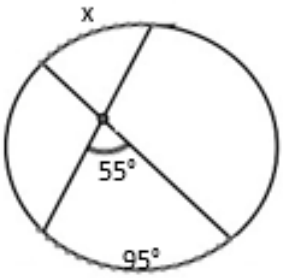
Na figura seguinte, a medida do ângulo x, em graus, é:



a) 80°
b) 82°
c) 84°
d) 86°
e) 90°

QUESTÃO 04

A medida do arco x na figura abaixo é:



a) 15°
b) 20°
c) 25°
d) 30°
e) 45°

QUESTÃO 05

Uma reta é tangente a uma circunferência quando:

a) tem dois pontos em comum.
b) tem três pontos em comum.
c) não tem ponto em comum.
d) tem um único ponto em comum.
e) nda

Resoluções

1- **Alternativa b**

O ângulo dado na figura (46°) é um ângulo inscrito, portanto é igual à metade do arco x:

$$46° = \frac{x}{2}$$

x = 46°.2
x = 92°

2- **Alternativa d**

O ângulo da figura é um ângulo excêntrico externo, portanto é igual à metade da diferença dos dois arcos dados.

$$y = \frac{110° - 40°}{2}$$

$$y = \frac{70°}{2} = 35°$$

3- **Alternativa c**

O ângulo x é um ângulo excêntrico interno, portanto é igual à metade da soma dos dois arcos.

$$x = \frac{108° + 60°}{2}$$

$$x = \frac{168°}{2} = 84°$$

4- **Alternativa a**

O ângulo de 55 é um ângulo excêntrico interno, portanto é igual à metade da soma dos dois arcos.

$$55° = \frac{95° + x}{2}$$

$$55°.2 = 95° + x$$
$$110° - 95° = x$$
$$x = 15°$$

5- questão teórica: **Alternativa d**

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL E NÃO DECIMAL

Sistema de Medidas Decimais

Um sistema de medidas é um conjunto de unidades de medida que mantém algumas relações entre si. O sistema métrico decimal é hoje o mais conhecido e usado no mundo todo. Na tabela seguinte, listamos as unidades de medida de comprimento do sistema métrico. A unidade fundamental é o metro, porque dele derivam as demais.

Unidades de Comprimento						
km	**hm**	**dam**	**M**	**dm**	**cm**	**mm**
quilômetro	hectômetro	decâme-tro	Metro	decímetro	centímetro	milímetro
1000m	100m	10m	1m	0,1m	0,01m	0,001m

Há, de fato, unidades quase sem uso prático, mas elas têm uma função. Servem para que o sistema tenha um padrão: cada unidade vale sempre 10 vezes a unidade menor seguinte.

Por isso, o sistema é chamado decimal.

E há mais um detalhe: embora o decímetro não seja útil na prática, o decímetro cúbico é muito usado com o nome popular de litro.

As unidades de área do sistema métrico correspondem às unidades de comprimento da tabela anterior.

São elas: quilômetro quadrado (km^2), hectômetro quadrado (hm^2), etc. As mais usadas, na prática, são o quilômetro quadrado, o metro quadrado e o hectômetro quadrado, este muito importante nas atividades rurais com o nome de hectare (ha): 1 hm^2 = 1 ha.

No caso das unidades de área, o padrão muda: uma unidade é 100 vezes a menor seguinte e não 10 vezes, como nos comprimentos. Entretanto, consideramos que o sistema continua decimal, porque $100 = 10^2$.

Unidades de Área						
km^2	**hm^2**	**dam^2**	**m^2**	**dm^2**	**cm^2**	**mm^2**
quilômetro quadrado	hectômetro quadrado	decâmetro quadrado	metro quadrado	decímetro quadrado	centímetro quadrado	milímetro quadrado
1000000m^2	10000m^2	100m^2	1m^2	0,01m^2	0,0001m^2	0,000001m^2

Agora, vejamos as unidades de volume. De novo, temos a lista: quilômetro cúbico (km^3), hectômetro cúbico (hm^3), etc. Na prática, são muitos usados o metro cúbico e o centímetro cúbico.

Nas unidades de volume, há um novo padrão: cada unidade vale 1000 vezes a unidade menor seguinte. Como $1000 = 10^3$, o sistema continua sendo decimal.

Unidades de Volume						
km^3	**hm^3**	**dam^3**	**m^3**	**dm^3**	**cm^3**	**mm^3**
quilômetro cúbico	hectômetro cúbico	decâmetro cúbico	metro cúbico	decímetro cúbico	centímetro cúbico	milímetro cúbico
1000000000m^3	1000000m^3	1000m^3	1 m^3	0,001m^3	0,000001m^3	0,000000001m^3

A noção de capacidade relaciona-se com a de volume. Se o volume da água que enche um tanque é de 7 000 litros, dizemos que essa é a capacidade do tanque. A unidade fundamental para medir capacidade é o litro (l); 1l equivale a 1 dm^3.

Cada unidade vale 10 vezes a unidade menor seguinte.

Unidades de Capacidade						
kl	**hl**	**dal**	**L**	**dl**	**cl**	**ml**
quilolitro	hectolitro	decalitro	Litro	decilitro	centímetro	mililitro
1000l	100l	10l	1l	0,1l	0,01l	0,001l

O sistema métrico decimal inclui ainda unidades de medidas de massa. A unidade fundamental é o grama.

Unidades de Massa						
Kg	**hg**	**dag**	**G**	**dg**	**cg**	**mg**
quilogra-ma	hectogra-ma	decagra-ma	grama	decigra-ma	centigra-ma	miligra-ma
1000m	100m	10m	1m	0,1m	0,01m	0,001m

Dessas unidades, só têm uso prático o quilograma, o grama e o miligrama. No dia-a-dia, usa-se ainda a tonelada (t): 1t = 1000 kg.

Não Decimais

Desse grupo, o sistema hora – minuto – segundo, que mede intervalos de tempo, é o mais conhecido.
2h = 2 . 60min = 120 min = 120 . 60s = 7 200s

Para passar de uma unidade para a menor seguinte, multiplica-se por 60.

0,3h não indica 30 minutos nem 3 minutos; como 1 décimo de hora corresponde a 6 minutos, conclui-se que 0,3h = 18min.

Para medir ângulos, também temos um sistema não decimal. Nesse caso, a unidade básica é o grau. Na astronomia, na cartografia e na navegação são necessárias medidas inferiores a 1°. Temos, então:
1 grau equivale a 60 minutos (1° = 60')
1 minuto equivale a 60 segundos (1' = 60")

Os minutos e os segundos dos ângulos não são, é claro, os mesmos do sistema hora – minuto – segundo. Há uma coincidência de nomes, mas até os símbolos que os indicam são diferentes:
1h32min24s é um intervalo de tempo ou um instante do dia.
1° 32'24" é a medida de um ângulo.

Por motivos óbvios, cálculos no sistema hora – minuto – segundo são similares a cálculos no sistema grau – minuto – segundo, embora esses sistemas correspondam a grandezas distintas.
Há ainda um sistema não-decimal, criado há algumas décadas, que vem se tornando conhecido. Ele é usado para medir a informação armazenada em memória de computadores, disquetes, discos compacto, etc. As unidades de medida são bytes (b), kilobytes (kb), megabytes (Mb), etc. Apesar de se usarem os prefixos "kilo" e "mega", essas unidades não formam um sistema decimal.
Um kilobyte equivale a 2^{10} bytes e 1 megabyte equivale a 2^{10}kilobytes.

Exercícios resolvidos

QUESTÃO 01
Raquel saiu de casa às 13h 45min, caminhando até o curso de inglês que fica a 15 minutos de sua casa, e chegou na hora da aula cuja duração é de uma hora e meia. A que horas terminará a aula de inglês?
a) 14h
b) 14h 30min
c) 15h 15min
d) 15h 30min
e) 15h 45min

QUESTÃO 02
348 mm^3 **equivalem a quantos** decilitros?

QUESTÃO 03
Quantos decalitros **equivalem a** 1 m^3?

GRUPO NOVA

QUESTÃO 04
Passe 50 dm^2 **para** hectômetros quadrados.

QUESTÃO 05
Quantos quilômetros cúbicos **equivalem a** 14 mm^3?

QUESTÃO 06
Quantos centilitros **equivalem a** 15 hl?

QUESTÃO 07
Passe 5.200 gramas **para** quilogramas.

QUESTÃO 08
Converta 2,5 metros **em** centímetros.

QUESTÃO 09
Quantos minutos equivalem a 5h05min?

QUESTÃO 10
Quantos minutos se passaram das 9h50min até as 10h35min?

Resoluções

1) Resposta "D".
Solução: Basta somarmos todos os valores mencionados no enunciado do teste, ou seja:
13h 45min + 15 min + 1h 30 min = 15h 30min
Logo, a questão correta é a letra D.

2) Resposta "0, 00348 dl".
Solução: Como 1 cm^3 equivale a 1 ml, é melhor dividirmos 348 mm^3 por mil, para obtermos o seu equivalente em centímetros cúbicos: 0,348 cm^3.
Logo 348 mm^3 equivalem a 0, 348 ml, já que cm^3 e ml se equivalem.

Neste ponto já convertemos de uma unidade de medida de volume, para uma unidade de medida de capacidade.
Falta-nos passarmos de mililitros para decilitros, quando então passaremos dois níveis à esquerda. Dividiremos então por 10 duas vezes:

$$0{,}348\ ml : 10 : 10 \Rightarrow 0{,}00348\ dl$$

Logo, 348 mm^3 equivalem a 0, 00348 dl.

3) Resposta "100 dal".
Solução: Sabemos que 1 m^3 equivale a 1.000 l, portanto para convertermos de litros a decalitros, passaremos um nível à esquerda.
Dividiremos então 1.000 por 10 apenas uma vez:

$$1000\ l : 10 \Rightarrow 100\ dal$$

Isto equivale a passar a vírgula uma casa para a esquerda.
Poderíamos também raciocinar da seguinte forma:
Como 1 m^3 equivale a 1 kl, basta fazermos a conversão de 1 kl para decalitros, quando então passaremos dois níveis à direita. Multiplicaremos então 1 por 10 duas vezes:

$$1\ kl \cdot 10 \cdot 10 \Rightarrow 100\ dal$$

Logo, 100 dal equivalem a 1 m^3.

4) Resposta "0, 00005 hm²".

Solução: Para passarmos de decímetros quadrados para hectômetros quadrados, passaremos três níveis à esquerda.

Dividiremos então por 100 três vezes:

$$50\ dm^2 : 100 : 100 : 100 \Rightarrow 0{,}00005\ hm^2$$

Isto equivale a passar a vírgula seis casas para a esquerda.

Portanto, 50 dm² é igual a 0, 00005 hm².

5) Resposta "0,000000000000000014 km³, ou a 1,4 x 10^{-17} km³".

Solução: Para passarmos de milímetros cúbicos para quilômetros cúbicos, passaremos seis níveis à esquerda. Dividiremos então 14 por 1000 seis vezes:

$$14\ mm^3 : 1000 : 1000 : 1000 : 1000 : 1000 : 1000 \Rightarrow 14 : 10^{18}\ km^3 \Rightarrow 14 \cdot 10^{-18}\ km^3 \Rightarrow$$

$$1{,}4 \cdot 10^{-17}\ km^3 \Rightarrow 0.000000000000000014\ km^3$$

Portanto, 0, 000000000000000014 km³, ou a 1,4 x 10^{-17} km³ **se expresso em notação científica equivalem a** 14 mm³.

6) Resposta "150.000 cl".

Solução: Para irmos de hectolitros a centilitros, passaremos quatro níveis à direita.

Multiplicaremos então 15 por 10 quatro vezes:

$$15\ hl \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \Rightarrow 150.000\ cl$$

Isto equivale a passar a vírgula quatro casas para a direita.

Logo, 150.000 cl equivalem a 15 hl.

7) Resposta "5,2 kg".

Solução: Para passarmos 5.200 gramas para quilogramas, devemos dividir (porque na tabela grama está à direita de quilograma) 5.200 por 10 três vezes, pois para passarmos de gramas para quilogramas saltamos três níveis à esquerda.

Primeiro passamos de grama para decagrama, depois de decagrama para hectograma e finalmente de hectograma para quilograma:

$$5200\ g : 10 : 10 : 10 \Rightarrow 5{,}2\ kg$$

Isto equivale a passar a vírgula três casas para a esquerda.

Portanto, 5.200 g são iguais a 5,2 kg.

8) Resposta "250 cm".

Solução: Para convertermos 2,5 metros em centímetros, devemos multiplicar (porque na tabela metro está à esquerda de centímetro) 2,5 por 10 duas vezes, pois para passarmos de metros para centímetros saltamos dois níveis à direita.

Primeiro passamos de metros para decímetros e depois de decímetros para centímetros:

$$2{,}5\ m \cdot 10 \cdot 10 \Rightarrow 250\ cm$$

Isto equivale a passar a vírgula duas casas para a direita.

Logo, 2,5 m é igual a 250 cm.

9) Resposta "305min".

Solução:

(5 . 60) + 5 = 305 min.

10) Resposta "45 min".

Solução: 45 min

GEOMETRIA PLANA

É o estudo das figuras em um só plano, por isso é chamada de Geometria Plana.

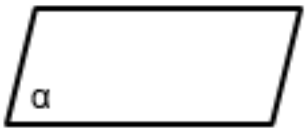
A Geometria estuda, basicamente, os três princípios fundamentais (ou também chamados de "entes primitivos") que são: **Ponto**, **Reta** e **Plano**. Estes três princípios **não tem definição** e **nem dimensão (tamanho)**.

Para representar um ponto usamos "." e para dar nome usamos letras maiúsculas do nosso alfabeto. Exemplo: . A (ponto A).

Para representar uma reta usamos ⟷ e para dar nome usamos letras minúsculas do nosso alfabeto ou dois pontos por onde esta reta passa. Exemplo: A B t (reta t ou reta $\overleftrightarrow{AB}$).

Para representar um plano usamos uma figura chamada paralelogramo e para dar nome usamos letras minúsculas do alfabeto grego (α, β, π, θ,....).

Exemplo: Plano alfa



Partes de uma reta

Estudamos, particularmente, duas partes de uma reta:

- **Semirreta**: é uma parte da reta que tem origem em um ponto e é infinita.

Exemplo: A B (semirreta $\overrightarrow{AB}$), tem origem em A e passa por B.

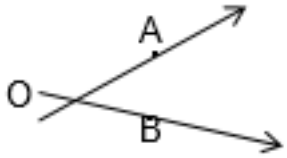
- **Segmento de reta**: é uma parte finita (tem começo e fim) da reta.

Exemplo: A B (segmento de reta $\overline{AB}$).

Observação: $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ e $\overline{AB} = \overline{BA}$.

ÂNGULO

Definição: é uma região limitada por duas semirretas de mesma origem.

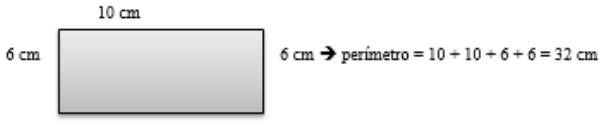


- Todo ângulo tem dois lados, no exemplo temos as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.
- O ponto O é chamado de vértice do ângulo.
- Nomenclatura: no exemplo temos o ângulo $A\hat{O}B$.

Outras definições importantes

- **Perímetro**: é a soma de todos os lados de uma figura plana.

Exemplo:



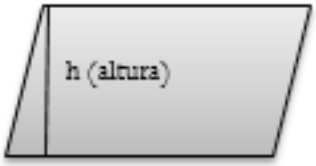
- Área: é uma medida de superfície, tendo como unidade básica o m², que é um quadrado que mede 1 m x 1 m. Pode ser representada por S (superfície) ou A (área).

ÁREA

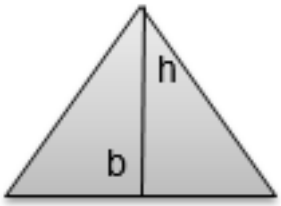
As figuras planas mais conhecidas e estudadas são:

- **Retângulo**: S = b.h

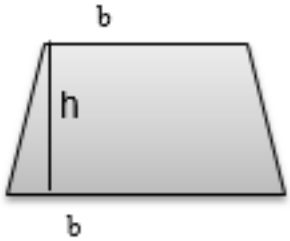
- **Paralelogramo**: S = b.h



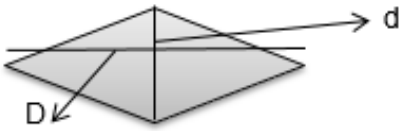
- **Triângulo**: $S = \frac{b.h}{2}$



- **Trapézio**: $S = \frac{(B+b).h}{2}$, onde B é a base maior, b é a base menor e h altura.



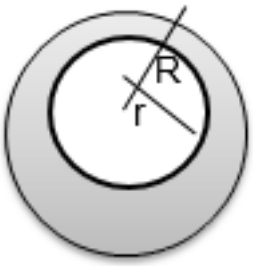
- **Losango**: $S = \frac{D.d}{2}$, onde D é a diagonal maior e d é a diagonal menor.



- **Quadrado**: $S = l^2$, onde l é o lado.

- **Círculo**: $S = \pi R^2$, onde R é o raio e O é o centro.

- **Coroa circular**: $S = \pi(R^2 - r^2)$ onde R é o raio maior e r é o raio menor.



Exercícios resolvidos

QUESTÃO 01

A área, em cm^2, de uma coroa circular cujos raios são 9 cm e 5 cm é igual a:

a) 4 π
b) 81 π
c) 56 π
d) 25 π
e) 30 π

QUESTÃO 02

Num trapézio isósceles, as bases medem 8 cm e 18 cm e os lados transversos medem 13 cm cada um. A área desse trapézio é:

a) 156 cm^2
b) 145cm^2
c) 150 cm^2
d) 125 cm^2
e) 165 cm^2

QUESTÃO 03

Um retângulo tem perímetro igual a 28 cm e sua altura é $\frac{3}{4}$ de seu comprimento, as medidas dos lados desse retângulo, em cm, são:

a) 6 e 4
b) 8 e 4
c) 8 e 10
d) 6 e 8
e) 6 e 10

QUESTÃO 04

A área de um triângulo é igual a 38,4 m^2. A altura desse triângulo é 8 m, então sua base, em m, é:

a) 8,6
b) 9,6
c) 7,6
d) 6,6
e) 10

QUESTÃO 05

O perímetro de um quadrado vale 56, então a área desse quadrado é:

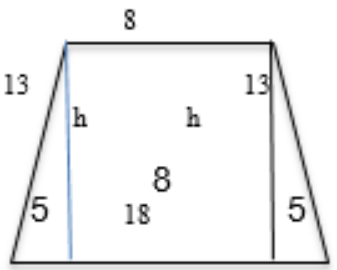
a) 169
b) 144
c) 196
d) 132
e) 150

Resoluções

1) Sendo R = 9 cm e r = 5 cm, temos:
$S = \pi(R^2 - r^2)$
$S = \pi(9^2 - 5^2)$
$S = \pi(81 - 25) = 56\ \pi\ cm^2$

Alternativa c

2) Um trapézio isósceles tem dois lados iguais e pelo enunciado, temos:



Pelo teorema de Pitágoras:
$13^2 = h^2 + 5^2 \rightarrow 169 = h^2 + 25 \rightarrow 169 - 25 = h^2 \rightarrow h^2 = 144 \rightarrow = 12$

$$S = \frac{(B+b).h}{2}$$

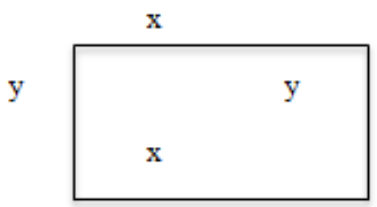
$$S = \frac{(18+8).12}{2}$$

$$S = \frac{26.12}{2} = \frac{312}{2}$$

$S = 156\ cm^2$

Alternativa a

3) Pelo enunciado temos:



$x + x + y + y = 28$

$2x + 2y = 28 \quad :(2)$

$x + y = 14$ (I)

$y = \frac{3.x}{4}$ (II), substituindo (II) em (I)

$x + \frac{3.x}{4} = 14$

$\frac{4x+3x}{4} = \frac{56}{4}$

$7x = 56$

$x = \frac{56}{7} = 8$

$y = \frac{3.8}{4} = \frac{24}{4} = 6$

Assim, os lados medem 6 cm e 8 cm.

Alternativa d

4) Pelo enunciado:

$S = 38{,}4$

$\frac{b.h}{2} = 38{,}4$

$\frac{b.8}{2} = 38{,}4$

$b = \frac{38{,}4.2}{8} = \frac{76{,}8}{8}$

$b = 9{,}6$ m

Alternativa b

5) Perímetro é a soma dos lados, então:

$l + l + l + l = 56$

$4l = 56$

$l = \frac{56}{4} = 14$

$S = l^2$

$S = 14^2$

$S = 196$

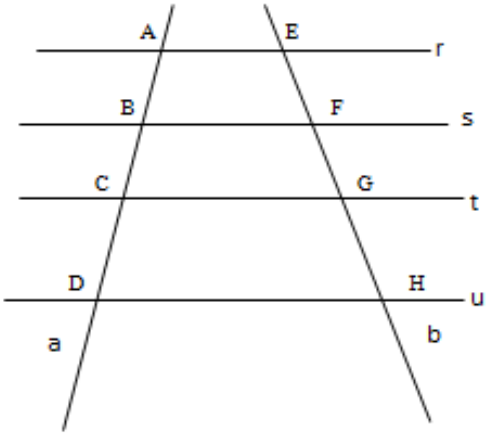
Alternativa c

TEOREMA DE TALES

- Feixe de paralelas: é todo conjunto de três ou mais retas e paralelas entre si.

- Transversal: é qualquer reta que intercepta todas as retas de um feixe de paralelas.

- **Teorema de Tales**: Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas então a razão entre as medidas de dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre as medidas dos segmentos correspondentes da outra.



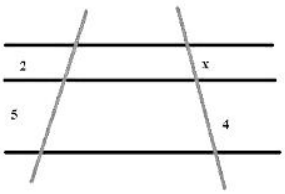
r//s//t//u (// ➔ símbolo de paralelas); a e b são retas transversais. Então, temos que os segmentos correspondentes são proporcionais.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{EH}} = \cdots.$$

Exercícios resolvidos

QUESTÃO 01

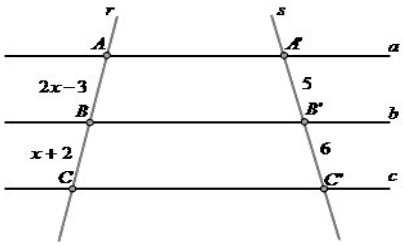
Na figura abaixo, o valor de x é:



a) 1,2
b) 1,4
c) 1,6
d) 1,8
e) 2,0

QUESTÃO 02

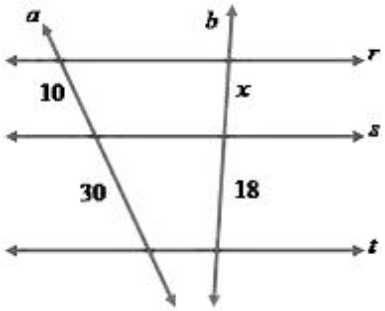
Na figura abaixo, qual é o valor de x?



a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

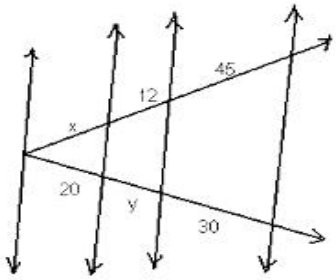
QUESTÃO 03

Calcular o valor de x na figura abaixo.



QUESTÃO 04

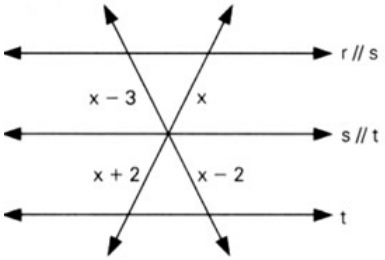
Os valores de x e y, respectivamente, na figura seguinte é:



a) 30 e 8
b) 8 e 30
c) 20 e 10
d) 10 e 20
e) 5 e 25

QUESTÃO 05

Na figura abaixo, qual é o valor de x?



a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

Resoluções

01- Alternativa c

Solução:

$$\frac{2}{5} = \frac{x}{4}$$

5x = 2.4
5x = 8
x = 8 : 5 = 1,6

02- Alternativa b

Solução:

$$\frac{2x-3}{x+2} = \frac{5}{6}$$

6.(2x – 3) = 5(x + 2)
12x – 18 = 5x + 10
12x – 5x = 10 + 18
7x = 28
x = 28 : 7 = 4

03- Resposta: 6

Solução:

$$\frac{10}{30} = \frac{x}{18}$$

30x = 10.18
30x = 180
x = 180 : 30 = 6

04- Alternativa a

Solução:

$$\frac{x}{45} = \frac{\cancel{20}}{\cancel{30}}$$

3x = 45.2
3x = 90
x = 90 : 3 = 30

$$\frac{y}{30} = \frac{12}{45}$$

45y = 12.30
45y = 360
y = 360 : 45 = 8

05- Alternativa d

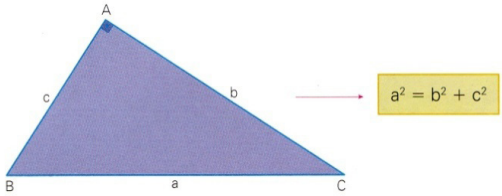
Solução:

$$\frac{x-3}{x-2} = \frac{x}{x+2}$$

$(x-3).((x+2) = x.(x-2)$
$x^2 + \cancel{2x} - 3x - 6 = x^2 - \cancel{2x}$
$-x - 6 = -2x$
$-x + 2x = 6$
$x = 6$

TEOREMA DE PITÁGORAS

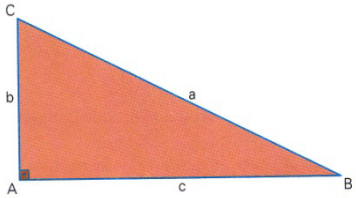
Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados da medida dos catetos.



Demonstrando o teorema de Pitágoras

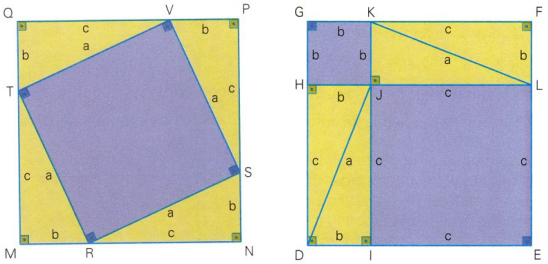
Existem inúmeras maneiras de demonstrar o teorema de Pitágoras. Veremos uma delas, baseada no cálculo de áreas de figuras geométricas planas.

Consideremos o triângulo retângulo da figura.



a = medida da hipotenusa
b = medida de um cateto
c = medida do outro cateto

Observe, agora, os quadrados MNPQ e DEFG, que têm a mesma área, pois o lado de cada quadrado mede (b+c).



- Área do quadrado MNPQ = área do quadrado RSVT + (área do triângulo RNS) . 4

- Área do quadrado DEFG = área do quadrado IELJ + área do quadrado GHJK + (área do retângulo DIJH).2

- Área do quadrado RSVT = a^2

- Área do triângulo RNS = $\frac{b.c}{2}$

- Área do quadrado IELJ = c^2

- Área do quadrado GHJK = b^2

- Área do retângulo DIJK = b.c

Como os quadrados MNPQ e DEFG têm áreas iguais, podemos escrever:

$$a^2+\left(\frac{b}{2}\right).4^2=c^2+b^2+(bc).2$$

$$a^2+2bc=c^2+b^2+2bc$$

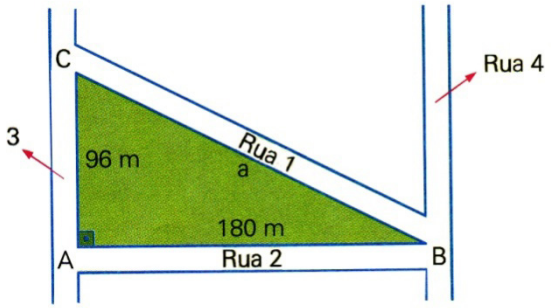
Cancelando 2bc, temos:

$$\boxed{a^2=b^2+c^2}$$

A demonstração algébrica do teorema de Pitágoras será feita mais adiante.

Pense & Descubra

Um terreno tem a forma de um triângulo retângulo e tem frente para três ruas: Rua 1, Rua 2 e Rua 3, conforme nos mostra a figura. Calcule, em metros, o comprimento a da frente do terreno voltada para a rua 1.



De acordo com os dados do problema, temos b = 96 m e c = 180 m.

Aplicando o teorema de Pitágoras:

$a2 = b2 + c^2$ $\qquad$ $a2 = 41616$

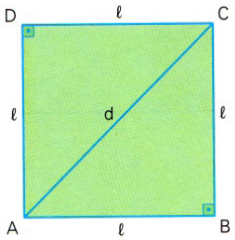
$a^2 = (96)^2 + (180)^2$ $\qquad$ $a = \sqrt{41616}$

$a^2 = 9216 + 32400$ $\qquad$ $a = 204$

Então, a frente do terreno para a rua 1 tem 204 m de comprimento.

Teorema de Pitágoras no quadrado

Aplicando o teorema de Pitágoras, podemos estabelecer uma relação importante entre a medida *d* da diagonal e a medida *l* do lado de um quadrado.



d= medida da diagonal
l= medida do lado

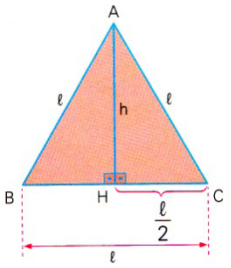
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, temos:

$d^2=l^2+l^2$ $\qquad$ $d=\sqrt{2l^2}$

$d^2=2\,l^2$ $\qquad$ $d=l\sqrt{2}$

Teorema de Pitágoras no triângulo equilátero

Aplicando o teorema de Pitágoras, podemos estabelecer uma relação importante entre a medida *h* da altura e a medida *l* do lado de um triângulo equilátero.



l= medida do lado
h= medida da altura

No triângulo equilátero, a altura e a mediana coincidem. Logo, *H* é ponto médio do lado $\overline{BC}$.

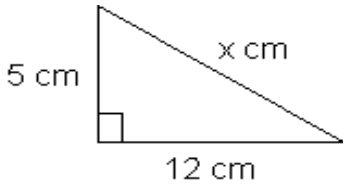
No triângulo retângulo AHC, H é ângulo reto. De acordo com o teorema de Pitágoras, podemos escrever:

$$l^2=h^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow h^2=l^2-\frac{l^2}{4} \rightarrow h^2=\frac{3l^2}{4} \rightarrow h=\sqrt{\frac{3l^2}{4}} \rightarrow \boxed{h=\frac{l\sqrt{3}}{2}}$$

Exercícios resolvidos

QUESTÃO 01

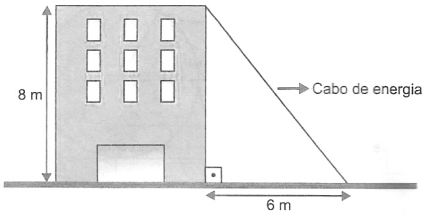
O valor de x, em cm, no triângulo retângulo abaixo é:



a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

QUESTÃO 02

Uma empresa de iluminação necessita esticar um cabo de energia provisório do topo de um edifício, cujo formato é um retângulo, a um determinado ponto do solo distante a 6 m, como ilustra a figura a seguir. O comprimento desse cabo de energia, em metros, será de:



a) 28
b) 14
c) 12
d) 10
e) 8

QUESTÃO 03

(Fuvest) Um trapézio retângulo tem bases medindo 5 e 2 e altura 4. O perímetro desse trapézio é:

a) 17
b) 16
c) 15
d) 14
e) 13

QUESTÃO 04

(UERJ) Millôr Fernandes, em uma bela homenagem à Matemática, escreveu um poema do qual extraímos o fragmento abaixo:

Às folhas tantas de um livro de Matemática, um Quociente apaixonou-se um dia doidamente por uma incógnita.

Olhou-a com seu olhar inumerável e viu-a do ápice à base: uma figura ímpar; olhos romboides, boca trapezoide, corpo retangular, seios esferoides.

Fez da sua uma vida paralela à dela, até que se encontraram no infinito.

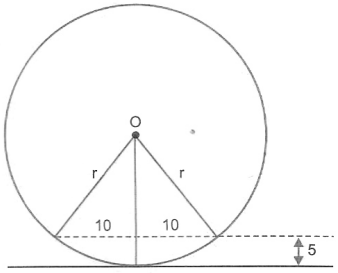
"Quem és tu" – indagou ele em ânsia radical.
"Sou a soma dos quadrados dos catetos.
Mas pode me chamar de Hipotenusa."
(Millôr Fernandes – Trinta Anos de Mim Mesmo)

A Incógnita se enganou ao dizer quem era. Para atender ao Teorema de Pitágoras, deveria dar a seguinte resposta:

a) "Sou a soma dos catetos. Mas pode me chamar de Hipotenusa."
b) "Sou o quadrado da soma dos catetos. Mas pode me chamar de Hipotenusa."
c) "Sou o quadrado da soma dos catetos. Mas pode me chamar de quadrado da Hipotenusa."
d) "Sou a soma dos quadrados dos catetos. Mas pode me chamar de quadrado da Hipotenusa."

QUESTÃO 05

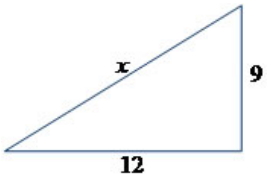
(Fatec) O valor do raio da circunferência da figura é:



a) 7,5
b) 14,4
c) 12,5
d) 9,5
e) 10,0

QUESTÃO 06

O valor do segmento desconhecido x no triângulo retângulo a seguir, é:



a) 15
b) 14
c) 12
d) 10
e) 6

Resoluções

1) **Alternativa d**

Solução: x é hipotenusa, 12 e 5 são os catetos, então:

$x^2 = 12^2 + 5^2$
$x^2 = 144 + 25$
$x^2 = 169$
$x = \sqrt{169}$
x = 13 cm

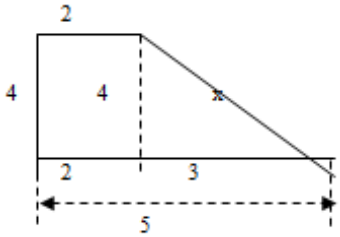
2) **Alternativa d**

Solução: como podemos observar na figura, temos um triângulo retângulo cujos catetos medem 8 m e 6 m, chamando o cabo de energia de x, pelo Teorema de Pitágoras:

$x^2 = 6^2 + 8^2$
$x^2 = 36 + 64$
$x^2 = 100$
$x = \sqrt{100}$
x = 10 m

3) **Alterntiva b**

Solução: temos que fazer uma figura, um trapézio retângulo é aquele que tem dois ângulos de 90°.



Perímetro é a soma dos quatro lados. Como podemos observar na figura acima, temos um triângulo retângulo cujos catetos medem 3 e 4 e x é a hipotenusa:

$x^2 = 3^2 + 4^4$
$x^2 = 9 + 16$
$x^2 = 25$
$x = \sqrt{25}$
x= 5

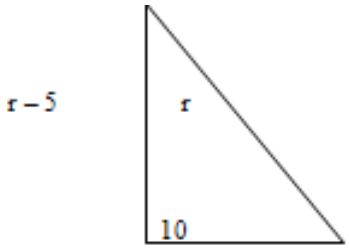
perímetro = 5 + 4 + 2 + 5 = 16

4) **Alternativa d**

Solução: de acordo com o Teorema de Pitágoras: "O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos."

5) **Alternativa c**

Solução: na figura dada podemos observar dois triângulos retângulos iguais e com lados medindo:



Sendo r a hipotenusa, 10 e r – 5 são catetos:

$r^2 = 10^2 + (r - 5)^2$
$r^2 = 100 + r^2 - 2.5.r + 5^2$
$r^2 = 100 + r^2 - 10r + 25$
$r^2 - r^2 + 10r = 125$
10r = 125
r = 125 : 10
r = 12,5

6) **Alternativa a**

Solução: aplicação direta do Teorema de Pitágoras:

$x^2 = 12^2 + 9^2$
$x^2 = 144 + 81$
$x^2 = 225$
$x = \sqrt{225}$
x = 15

POLÍGONOS

Polígono é uma figura geométrica formada por n (n ∈ **N** e $n \geq 3$) lados consecutivos e não colineares.

A classificação de um polígono é dada de acordo com o número de lados conforme tabela a seguir:

Nº de lados	Nome
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

Fórmulas

Sendo $n = \begin{cases} lados \\ angulos \\ vértices \end{cases}$, temos:

I) **Diagonais do vértice**: $d_v = n - 3$.

II) **Total de diagonais**: $d = \dfrac{(n-3)\,n}{2}$.

III) **Soma dos ângulos internos**: $S_i = (n-2)\,180^\circ$.

IV) **Soma dos ângulos externos**: $S_e = 360^\circ$.

Polígono Regular

É um polígono equilátero e equiângulo ao mesmo tempo. E, temos:

I) Ângulo interno: $a_i = \dfrac{(n-2)\,180^\circ}{n}$.

II) Ângulo externo: $a_e = \dfrac{360^\circ}{n}$.

Obs: em todo polígono, regular ou não: $a_i + a_e = 180^\circ$.

Exercícios resolvidos

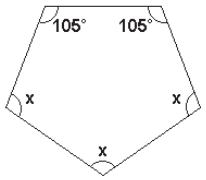
QUESTÃO 01

(Mack) O polígono regular convexo em que o número de lados é igual ao número de diagonais é o:

a) dodecágono
b) pentágono
c) hexágono
d) decágono
e) heptágono

QUESTÃO 02

(Fuvest) Na figura abaixo, pede-se determinar o valor de x:



QUESTÃO 03

O polígono regular cujo ângulo interno mede o triplo do ângulo externo é o:

a) pentágono
b) hexágono
c) octógono
d) undecágono
e) pentadecágono

QUESTÃO 04

Um polígono tem 9 diagonais, qual é o número de lados desse polígono?

QUESTÃO 05

Determinar a soma dos ângulos internos de um decágono.

QUESTÃO 06

Quantas diagonais tem um icoságono?

Resoluções

1) **Alternativa b**

Solução:

n = d

$n = \frac{(n-3).n}{2}$

$(n-3).n = 2n$

n – 3 = 2

n = 2 + 3 = 5

2) **Resposta: 110°**

Solução: a soma dos 5 ângulos da é igual a soma dos ângulos internos de um pentágono n = 5 lados.

$x + x + x + 105° + 105° = S_i$
$3x + 210° = (n - 2).180°$
$3x + 210° = (5 - 2).180°$
$3x = 3.180° - 210°$
$3x = 540° - 210°$
$3x = 330°$
$x = 330° : 3 = 110°$

3) **Alternativa c**

Solução:

$a_i = 3.a_e$

$$\frac{(n-2).180°}{n} = 3.\frac{360°}{n}$$

$$(n-2) = 3.\frac{360°}{180°}$$

$n - 2 = 3.2$
$n = 6 + 2 = 8$

4) **Resposta: 6**

Solução:

$d = 9$

$$\frac{(n-3).n}{2} = 9$$

$n^2 - 3n = 2.9$
$n^2 - 3n = 18$
$n^2 - 3n - 18 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (-3)^2 - 4.1.(-18)$
$\Delta = 9 + 72$
$\Delta = 81$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{81}}{2.1} = \frac{3 \pm 9}{2} \rightarrow x = \frac{3+9}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ ou } x = \frac{3-9}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

(não convém, o número de lados de um polígono não pode ser negativo).

5) **Resposta: 1440°**

Solução: decágono tem 10 lados.

$S_i = (n - 2).180°$
$S_i = (10 - 2).180°$
$S_i = 8.180°$
$S_i = 1440°$

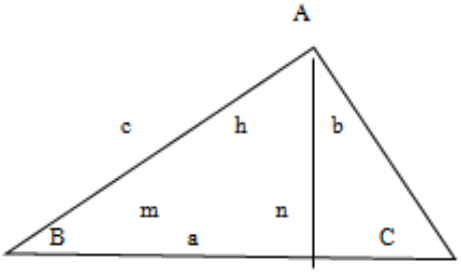
6) **Resposta: 170**

Solução: icoságono tem 20 lados.

$$d = \frac{(n-3).n}{2}$$

$$d = \frac{(20-3).20}{s} = \frac{17.20}{2} = \frac{340}{2} = 170$$

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO



Sendo:
a ➔ hipotenusa
b e c ➔ catetos
h➔ altura
m e n ➔ projeções do catetos

Por semelhança de triângulos foram deduzidas 4 relações métricas válidas somente para triângulos retângulos que são:

I) **Teorema de Pitágoras**: O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

$HIP^2 = CAT^2 + CAT^2$

II) O quadrado de um cateto é igual ao produto da hipotenusa pela projeção do cateto.

$CAT^2 = HIP.PROJ$

III) O quadrado da altura é igual ao produto das projeções dos catetos.

$ALT^2 = PROJ.PROJ$

IV) O produto da hipotenusa pela altura é igual ao produto dos catetos.

HIP.ALT = CAT.CAT

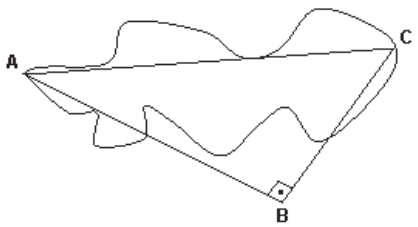
Exercícios resolvidos

QUESTÃO 01

A área de um triângulo retângulo é 12 dm². Se um dos catetos é 2/3 do outro, calcule a medida da hipotenusa desse triângulo.

QUESTÃO 02

(UEL) Pedrinho não sabia nadar e queria descobrir a medida da parte mais extensa (AC) da "Lagoa Funda". Depois de muito pensar, colocou 3 estacas nas margens da lagoa, esticou cordas de A até B e de B até C, conforme figura abaixo. Medindo essas cordas, obteve: $\overline{AB}$ = 24 m e $\overline{BC}$ = 18 m. Usando seus conhecimentos matemáticos, Pedrinho concluiu que a parte mais extensa da lagoa mede:



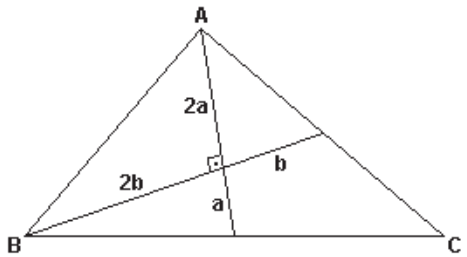
a) 30
b) 28
c) 26
d) 35
e) 42

QUESTÃO 03

Em um triângulo retângulo a hipotenusa mede 10 cm e um dos catetos mede 6 cm, pede-se determinar as medidas do outro cateto, a altura e as projeções dos catetos.

QUESTÃO 04

Em um triângulo ABC, figura a seguir, as medianas que partem de A e de B são perpendiculares. Se $\overline{BC}$ = 8 e $\overline{AC}$ = 6, o valor de $\overline{AB}$ é:



a) $3\sqrt{6}$
b) $4\sqrt{3}$
c) $12\sqrt{7}$
d) $2\sqrt{5}$
e) $4\sqrt{2}$

QUESTÃO 05

Em um triângulo retângulo os catetos medem 6 cm e 8 cm. Determinar a medida da hipotenusa, da altura e das projeções dos catetos desse triângulo.

Resoluções

1) **Resposta: $2\sqrt{13}$**

Solução: do enunciado se um cateto é x o outro é $\frac{2x}{3}$, e em um triângulo retângulo para calcular a área, uma cateto é a base e o outro é a altura, e a fórmula da área é $A = \frac{b.h}{2}$, então:

$A = 12$

$\frac{x.\frac{2x}{3}}{2} = 12$

$\frac{2x^2}{6} = 12$ ➔ $2x^2 = 12.6$ ➔ $2x^2 = 72$ ➔ $x^2 = 72 : 2$

$x^2 = 36$ ➔ $x = \sqrt{36} = 6$

Uma cateto mede 6 e o outro $\frac{2.6}{3} = 4$, pelo teorema de Pitágoras, sendo **a** a hipotenusa:

$a^2 = 6^2 + 4^2$
$a^2 = 36 + 16$
$a^2 = 52$
$a = \sqrt{52}$
$a = \sqrt{13.4}$
$a = 2\sqrt{13}$

2) **Alternativa a**

Solução: pelo teorema de Pitágoras:

$\overline{AC}^2 = 24^2 + 18^2$
$\overline{AC}^2 = 576 + 324$
$\overline{AC}^2 = 900$
$\overline{AC} = \sqrt{900}$
$\overline{AC} = 30$

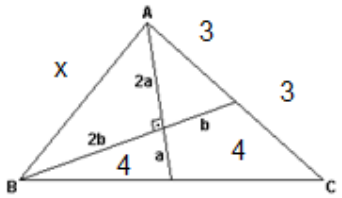
3) **Resposta 8 cm**

Solução: do enunciado um cateto mede 6 cm e a hipotenusa 10 cm, pelo teorema de Pitágoras:

$10^2 = x^2 + 6^2$
$100 = x^2 + 36$
$100 - 36 = x^2$
$x^2 = 64$
$x = \sqrt{64}$
$x = 8$ cm

4) **Alternativa d**

Solução: mediana divide o lado oposto em duas partes iguais.



Pelo teorema de Pitágoras:
$x^2 = (2a)^2 + (2b)^2$
$x^2 = 4a^2 + 4b^2$ (colocando o 4 em evidência)
$x^2 = 4.(a^2 + b^2)$ **(I)**

$3^2 = (2a^2) + b^2$
$9 = 4a^2 + b^2$ **(II)**

$4^2 = a^2 + (2b)^2$
$16 = a^2 + 4b^2$ **(III)**

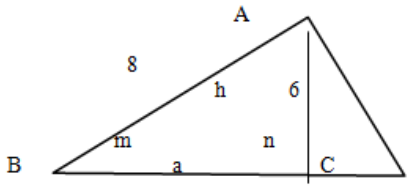
Somando, membro a membro, as equações (II) e (III):

$$\begin{array}{l} 9 = 4a^2 + b^2 \\ \underline{16 = a^2 + 4b^2} \quad + \\ 25 = 5a^2 + 5b^2 \text{ (dividindo por 5)} \end{array}$$

$5 = a^2 + b^2$ (substituindo em (I)):
$x^2 = 4.5$
$x^2 = 20$
$x =$
$x = 2$

5) **Respostas: 10 cm, 4,8 cm, 3,6 cm e 6,4 cm**

Solução: utilizando as relações métricas, temos:



Teorema de Pitágoras:

$a^2 = 8^2 + 6^2$
$a^2 = 64 + 36$
$a^2 = 100$
$a = \sqrt{100}$
$a = 10$ cm

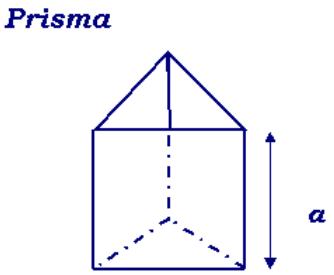
HIP.ALT = CAT.CAT
$10.h = 8.6$
$10h = 48$
$h = 48 : 10 = 4{,}8$ cm

CAT^2 = HIP.PROJ
$6^2 = 10.n$
$36 = 10\ n$
$n = 36 : 10 = 3{,}6$ cm

$8^2 = 10.m$
$64 = 10m$
$m = 64 : 10 = 6{,}4$ cm

SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Para explicar o cálculo do volume de figuras geométricas, podemos pedir que visualizem a seguinte figura:



a) *A figura representa a planificação de um prisma reto;*

b) O volume de um prisma reto é igual ao produto da área da base pela altura do sólido, isto é

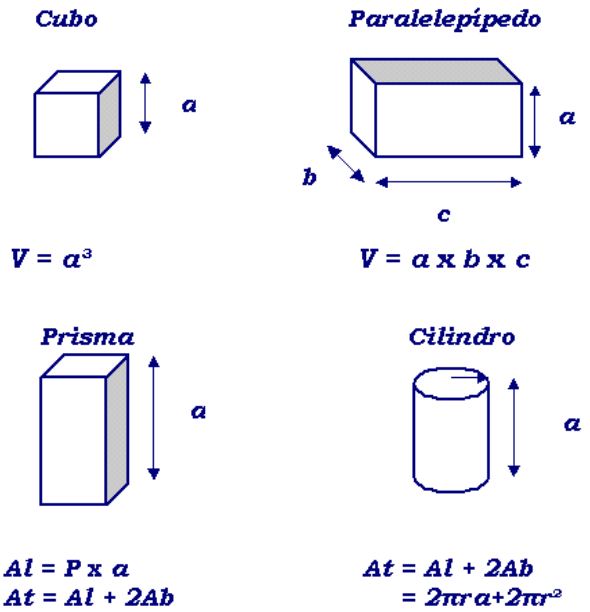
$$V = Ab \times a$$

c) O cubo e o paralelepípedo retângulo são prismas;

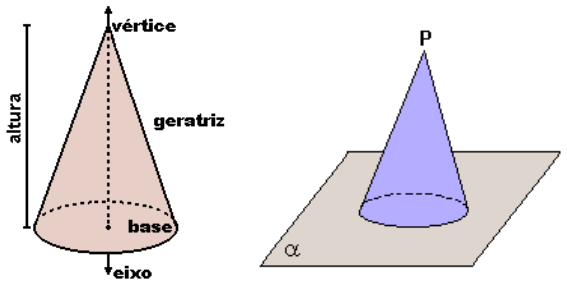
d) O volume do cilindro também se pode calcular da mesma forma que o volume de um prisma reto.

Os formulários seguintes, das figuras geométricas são para calcular da mesma forma que as acima apresentadas:

Figuras Geométricas:



O conceito de cone

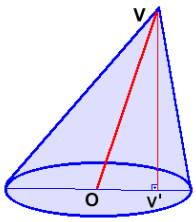


Considere uma região plana limitada por uma curva suave (sem quinas), fechada e um ponto P fora desse plano. Chamamos de cone ao sólido formado pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade em P e a outra num ponto qualquer da região.

Elementos do cone

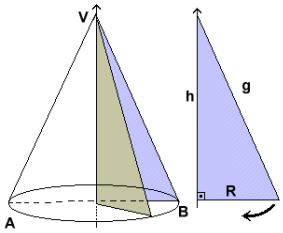
- **Base**: A base do cone é a região plana contida no interior da curva, inclusive a própria curva.
- **Vértice**: O vértice do cone é o ponto P.
- **Eixo**: Quando a base do cone é uma região que possui centro, o eixo é o segmento de reta que passa pelo vértice P e pelo centro da base.
- **Geratriz**: Qualquer segmento que tenha uma extremidade no vértice do cone e a outra na curva que envolve a base.
- **Altura**: Distância do vértice do cone ao plano da base.
- **Superfície lateral**: A superfície lateral do cone é a reunião de todos os segmentos de reta que tem uma extremidade em P e a outra na curva que envolve a base.
- **Superfície do cone**: A superfície do cone é a reunião da superfície lateral com a base do cone que é o círculo.
- **Seção meridiana**: A seção meridiana de um cone é uma região triangular obtida pela interseção do cone com um plano que contem o eixo do mesmo.

Classificação do cone



Quando observamos a posição relativa do eixo em relação à base, os cones podem ser classificados como retos ou oblíquos. Um cone é dito **reto** quando o eixo é perpendicular ao plano da base e é **oblíquo** quando não é um cone reto. Ao lado apresentamos um cone oblíquo.

Observação: Para efeito de aplicações, os cones mais importantes são os cones retos. Em função das bases, os cones recebem nomes especiais. Por exemplo, um cone é dito circular se a base é um círculo e é dito elíptico se a base é uma região elíptica.



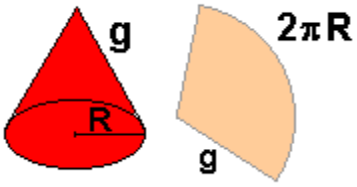
Observações sobre um cone circular reto

1. Um cone circular reto é chamado cone de revolução por ser obtido pela rotação (revolução) de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos
2. A seção meridiana do cone circular reto é a interseção do cone com um plano que contem o eixo do cone. No caso acima, a seção meridiana é a região triangular limitada pelo triângulo isósceles VAB.
3. Em um cone circular reto, todas as geratrizes são congruentes entre si. Se g é a medida de cada geratriz então, pelo Teorema de Pitágoras, temos: $g^2 = h^2 + R^2$

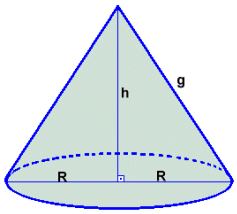
4. A **Área Lateral** de um cone circular reto pode ser obtida em função de g (medida da geratriz) e R (raio da base do cone): A_{Lat} = Pi R g

5. A **Área total** de um cone circular reto pode ser obtida em função de g (medida da geratriz) e R (raio da base do cone):

A_{Total} = Pi R g + Pi R^2



Cones Equiláteros



Um cone circular reto é um cone equilátero se a sua seção meridiana é uma região triangular equilátera e neste caso a medida da geratriz é igual à medida do diâmetro da base.

A área da base do cone é dada por:

A_{Base}=Pi R^2

Pelo Teorema de Pitágoras temos:

$(2R)^2 = h^2 + R^2$

$h^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$

Assim:

$h = R\sqrt{3}$

Como o volume do cone é obtido por 1/3 do produto da área da base pela altura, então:

$V = (1/3)\ Pi\sqrt{3}R^3$

Como a área lateral pode ser obtida por:

A_{Lat} = Pi R g = Pi R 2R = 2 Pi R^2

então a área total será dada por:

A_{Total} = 3 Pi R^2

O conceito de esfera

A esfera no espaço R^3 é uma superfície muito importante em função de suas aplicações a problemas da vida. Do ponto de vista matemático, a esfera no espaço R^3 é confundida com o sólido geométrico (disco esférico) envolvido pela mesma, razão pela quais muitas pessoas calculam o volume da esfera. Na maioria dos livros elementares sobre Geometria, a esfera é tratada como se fosse um sólido, herança da Geometria Euclidiana.

Embora não seja correto, muitas vezes necessitamos falar palavras que sejam entendidas pela coletividade. De um ponto de vista mais cuidadoso, a esfera no espaço R^3 é um objeto matemático parametrizado por duas dimensões, o que significa que podemos obter medidas de área e de comprimento, mas o volume tem medida nula. Há outras esferas, cada uma definida no seu respectivo espaço n-dimensional. Um caso interessante é a esfera na reta unidimensional:

$S^o = \{x \text{ em } R: x^2=1\} = \{+1,-1\}$

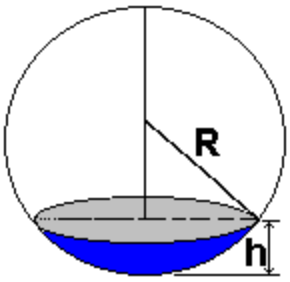
Por exemplo, a esfera

$S^1 = \{ (x,y) \text{ em } R^2: x^2 + y^2 = 1 \}$

é conhecida por nós como uma circunferência de raio unitário centrada na origem do plano cartesiano.

Aplicação: volumes de líquidos

Um problema fundamental para empresas que armazenam líquidos em tanques esféricos, cilíndricos ou esféricos e cilíndricos é a necessidade de realizar cálculos de volumes de regiões esféricas a partir do conhecimento da altura do líquido colocado na mesma. Por exemplo, quando um tanque é esférico, ele possui um orifício na parte superior (pólo Norte) por onde é introduzida verticalmente uma vara com indicadores de medidas. Ao retirar a vara, observa-se o nível de líquido que fica impregnado na vara e esta medida corresponde à altura de líquido contido na região esférica. Este não é um problema trivial, como observaremos pelos cálculos realizados na sequência.



A seguir apresentaremos elementos esféricos básicos e algumas fórmulas para cálculos de áreas na esfera e volumes em um sólido esférico.

A superfície esférica

A esfera no espaço R^3 é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão localizados a uma mesma distância denominada raio de um ponto fixo chamado centro.

Uma notação para a esfera com raio unitário centrada na origem de R^3 é:

$S^2 = \{ (x,y,z) \text{ em } R^3: x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$

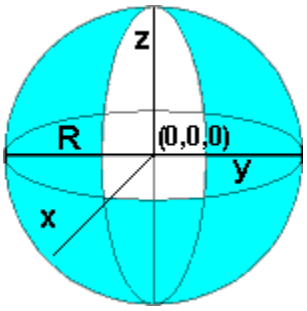
Uma esfera de raio unitário centrada na origem de R^4 é dada por:

$S^3 = \{ (w,x,y,z) \text{ em } R^4: w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$

Você conseguiria imaginar espacialmente tal esfera?

Do ponto de vista prático, a esfera pode ser pensada como a película fina que envolve um sólido esférico. Em uma melancia esférica, a esfera poderia ser considerada a película verde (casca) que envolve a fruta.

É comum encontrarmos na literatura básica a definição de esfera como sendo o sólido esférico, no entanto não se devem confundir estes conceitos. Se houver interesse em aprofundar os estudos desses detalhes, deve-se tomar algum bom livro de Geometria Diferencial que é a área da Matemática que trata do detalhamento de tais situações.



O disco esférico é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão localizados na casca e dentro da esfera. Do ponto de vista prático, o disco esférico pode ser pensado como a reunião da película fina que envolve o sólido esférico com a região sólida dentro da esfera. Em uma melancia esférica, o disco esférico pode ser visto como toda a fruta.

Quando indicamos o raio da esfera pela letra R e o centro da esfera pelo ponto (0,0,0), a equação da esfera é dada por:

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

e a relação matemática que define o disco esférico é o conjunto que contém a casca reunido com o interior, isto é:

$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$

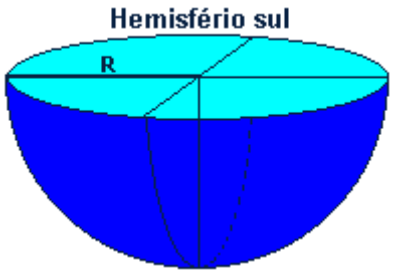
Quando indicamos o raio da esfera pela letra R e o centro da esfera pelo ponto (x_o,y_o,z_o), a equação da esfera é dada por:

$(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + (z-z_o)^2 = R^2$

e a relação matemática que define o disco esférico é o conjunto que contém a casca reunido com o interior, isto é, o conjunto de todos os pontos (x,y,z) em R^3 tal que:

$(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + (z-z_o)^2 \leq R^2$

Da forma como está definida, a esfera centrada na origem pode ser construída no espaço euclidiano R^3 de modo que o centro da mesma venha a coincidir com a origem do sistema cartesiano R^3, logo podemos fazer passar os eixos OX, OY e OZ, pelo ponto (0,0,0).



Seccionando a esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ com o plano z=0, obteremos duas superfícies semelhantes: o hemisfério Norte ("boca para baixo") que é o conjunto de todos os pontos da esfera onde a cota z é não negativa e o hemisfério Sul ("boca para cima") que é o conjunto de todos os pontos da esfera onde a cota z não é positiva.

Se seccionarmos a esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ por um plano vertical que passa em (0,0,0), por exemplo, o plano x=0, teremos uma circunferência maximal C da esfera que é uma circunferência contida na esfera cuja medida do raio coincide com a medida do raio da esfera, construída no plano YZ e a equação desta circunferência será:

$x=0,\ y^2 + z^2 = R^2$

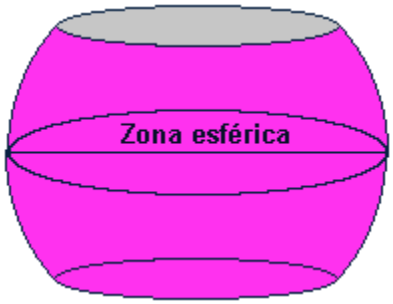
sendo que esta circunferência intersecta o eixo OZ nos pontos de coordenadas (0,0,R) e (0,0,-R). Existem infinitas circunferências maximais em uma esfera.

Se rodarmos esta circunferência maximal C em torno do eixo OZ, obteremos a esfera através da rotação e por este motivo, a esfera é uma superfície de revolução.

Se tomarmos um arco contido na circunferência maximal cujas extremidades são os pontos (0,0,R) e (0,p,q) tal que $p^2+q^2=R^2$ e rodarmos este arco em torno do eixo OZ, obteremos uma superfície denominada calota esférica.

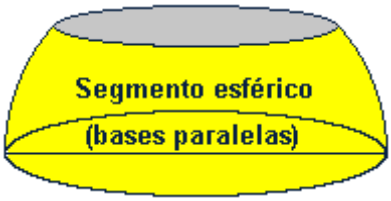
Na prática, as pessoas usam o termo calota esférica para representar tanto a superfície como o sólido geométrico envolvido pela calota esférica. Para evitar confusões, usarei "calota esférica" com aspas para o sólido e sem aspas para a superfície.

A partir da rotação, construiremos duas calotas em uma esfera, de modo que as extremidades dos arcos sejam (0,0,R) e (0,p,q) com $p^2+q^2=R^2$ no primeiro caso (calota Norte) e no segundo caso (calota Sul) as extremidades dos arcos (0,0,-R) e (0,r,-s) com $r^2+s^2=R^2$ e retirarmos estas duas calotas da esfera, teremos uma superfície de revolução denominada zona esférica.



De um ponto de vista prático, consideremos uma melancia esférica. Com uma faca, cortamos uma "calota esférica" superior e uma "calota esférica" inferior. O que sobra da melancia é uma região sólida envolvida pela zona esférica, algumas vezes denominada zona esférica.

Consideremos uma "calota esférica" com altura h_1 e raio da base r_1 e retiremos desta calota uma outra "calota esférica" com altura h_2 e raio da base r_2, de tal modo que os planos das bases de ambas sejam paralelos. A região sólida determinada pela calota maior menos a calota menor recebe o nome de segmento esférico com bases paralelas.



No que segue, usaremos esfera tanto para o sólido como para a superfície, "calota esférica" para o sólido envolvido pela calota esférica, a letra maiúscula R para entender o raio da esfera sobre a qual estamos realizando os cálculos, V será o volume, A(lateral) será a área lateral e A(total) será a área total.

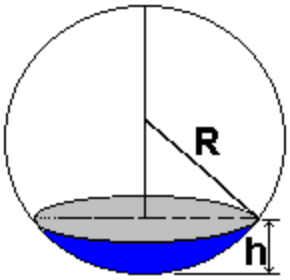
Algumas fórmulas (relações) para objetos esféricos

Objeto	Relações e fórmulas
Esfera	Volume = (4/3) Pi R^3 A(total) = 4 Pi R^2
Calota esférica (altura h, raio da base r)	$R^2 = h\ (2R-h)$ A(lateral) = 2 Pi R h A(total) = Pi h (4R-h) $V=Pi.h^2(3R-h)/3=Pi(3R^2+h^2)/6$
Segmento esférico (altura h, raios das bases $r_1>r^2$)	$R^2 = a^2 + [(r_1^2 - r_2^2 - h^2)/2h)]^2$ A(lateral) = 2 Pi R h A(total) = $Pi(2Rh+r_1^2+r_2^2)$ $Volume=Pi.h(3r_1^2+3r_2^2+h^2)/6$

Estas fórmulas podem ser obtidas como aplicações do Cálculo Diferencial e Integral, mas nós nos limitaremos a apresentar um processo matemático para a obtenção da fórmula do cálculo do volume da "calota esférica" em função da altura da mesma.

Volume de uma calota no hemisfério Sul

Consideremos a esfera centrada no ponto (0,0,R) com raio R.



A equação desta esfera será dada por:

$x^2 + y^2 + (z-R)^2 = R^2$

A altura da calota será indicada pela letra h e o plano que coincide com o nível do líquido (cota) será indicado por z=h. A interseção entre a esfera e este plano é dado pela circunferência

$x^2 + y^2 = R^2 - (h-R)^2$

Obteremos o volume da calota esférica com a altura h menor ou igual ao raio R da esfera, isto é, h pertence ao intervalo [0,R] e neste caso poderemos explicitar o valor de z em função de x e y para obter:

$$z = R - \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$$

Para simplificar as operações algébricas, usaremos a letra r para indicar:

$r^2 = R^2 - (h-R)^2 = h(2R-h)$

A região circular S de integração será descrita por $x^2+y^2 \leq R^2$ ou em coordenadas polares através de:

$0 \leq m \leq R, \quad 0 \leq t \leq 2Pi$

A integral dupla que representa o volume da calota em função da altura h é dada por:

$$V_C(h) = \iint_S (h - z)dxdy$$

ou seja

$$V_C(h) = \iint_S (h - R + \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}\,)dxdy$$

Escrita em Coordenadas Polares, esta integral fica na forma:

$$V_C(h) = \int_{t=0}^{2\pi} \int_{m=0}^{R} (h - R + \sqrt{R^2 - m^2}\,)\; m\; dm\; dt$$

Após realizar a integral na variável t, podemos separá-la em duas integrais:

$$V_C(h) = 2\pi\{\int_0^R (h - R)\; m\; dm + \int_0^R \sqrt{R^2 - m^2}\; m\; dm\}$$

ou seja:

$$V_C(h) = \pi\{(h - R)R^2 - \int_0^R \sqrt{R^2 - m^2}\,(-2m)\; dm\}$$

Com a mudança de variável $u=R^2-m^2$ e $du=(-2m)\,dm$ poderemos reescrever:

$$V_C(h) = \pi\{(h - R)R^2 + \int_{u=0}^{R^2} \sqrt{u}\; du\}$$

Após alguns cálculos obtemos:

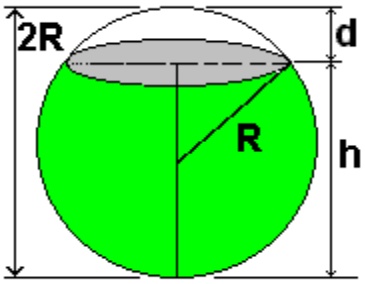
$V_C(h) = Pi\,(h-R)\,[R^2 - (h-R)^2] - (2/3)Pi[(R-h)^3 - R^3]$

e assim temos a fórmula para o cálculo do volume da calota esférica no hemisfério Sul com a altura h no intervalo [0,R], dada por:

$V_C(h) = Pi\,h^2(3R-h)/3$

Volume de uma calota no hemisfério Norte

Se o nível do líquido mostra que a altura h já ultrapassou o raio R da região esférica, então a altura h está no intervalo [R,2R]



Lançaremos mão de uma propriedade de simetria da esfera que nos diz que o volume da calota superior assim como da calota inferior somente depende do raio R da esfera e da altura h e não da posição relativa ocupada.

Aproveitaremos o resultado do cálculo utilizado para a calota do hemisfério Sul. Tomaremos a altura tal que: h=2R-d, onde d é a altura da região que não contém o líquido. Como o volume desta calota vazia é dado por:

$V_C(d) = Pi\,d^2(3R-d)/3$

e como h=2R-d, então para h no intervalo [R,2R], poderemos escrever ovolume da calota vazia em função de h:

$V_C(h) = Pi\,(2R-h)^2(R+h)/3$

Para obter o volume ocupado pelo líquido, em função da altura, basta tomar o volume total da região esférica e retirar o volume da calota vazia, para obter:

$V(h) = 4Pi\,R^3/3 - Pi\,(2R-h)^2(R+h)/3$

que pode ser simplificada para:

$V(h) = Pi\,h^2(3R-h)/3$

Independentemente do fato que a altura h esteja no intervalo [0,R] ou [R,2R] ou de uma forma geral em [0,2R], o cálculo do volume ocupado pelo líquido é dado por:

$V(h) = Pi\,h^2(3R-h)/3$

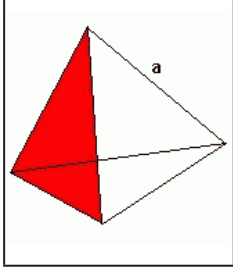
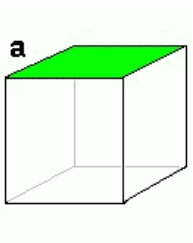
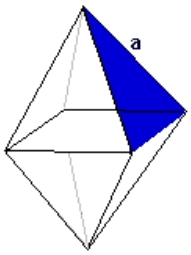
Poliedro

Poliedro é um sólido limitado externamente por planos no espaço R^3. As regiões planas que limitam este sólido são as faces do poliedro. As interseções das faces são as arestas do poliedro. As interseções das arestas são os vértices do poliedro. Cada face é uma região poligonal contendo n lados.

Poliedros convexos são aqueles cujos ângulos diedrais formados por planos adjacentes têm medidas menores do que 180 graus. Outra definição: Dados quaisquer dois pontos de um poliedro convexo, o segmento que tem esses pontos como extremidades, deverá estar inteiramente contido no poliedro.

Poliedros Regulares

Um poliedro é regular se todas as suas faces são regiões poligonais regulares com n lados, o que significa que o mesmo número de arestas se encontram em cada vértice.

Tetraedro	Hexaedro (cubo)	Octaedro
		

Áreas e Volumes

Poliedro regular	Área	Volume
Tetraedro	a^2 R[3]	(1/12) a^3 R[2]
Hexaedro	6 a^2	a^3
Octaedro	2 a^2 R[3]	(1/3) a^3 R[2]
Dodecaedro	3a^2 R{25+10 ·R[5]}	(1/4) a^3 (15+7 ·R[5])
Icosaedro	5a^2 R[3]	(5/12) a^3 (3+R[5])
Nesta tabela, a notação R[z] significa a raiz quadrada de z≥0.		

Prisma

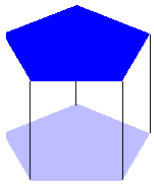
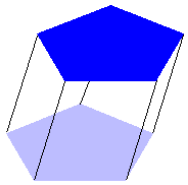
Prisma é um sólido geométrico delimitado por faces planas, no qual as bases se situam em planos paralelos. Quanto à inclinação das arestas laterais, os prismas podem ser retos ou oblíquos.

Prisma reto

As arestas laterais têm o mesmo comprimento.
As arestas laterais são perpendiculares ao plano da base.
As faces laterais são retangulares.

Prisma oblíquo

As arestas laterais têm o mesmo comprimento. As arestas laterais são oblíquas ao plano da base. As faces laterais não são retangulares.

	**Bases**: regiões poligonais congruentes **Altura**: distância entre as bases **Arestas laterais paralelas**: mesmas medidas **Faces laterais**: paralelogramos	
Prisma reto	**Aspectos comuns**	**Prisma oblíquo**

Seções de um prisma

Seção transversal

É a região poligonal obtida pela interseção do prisma com um plano paralelo às bases, sendo que esta região poligonal é congruente a cada uma das bases.

Seção reta (seção normal)

É uma seção determinada por um plano perpendicular às arestas laterais.

Princípio de Cavaliere

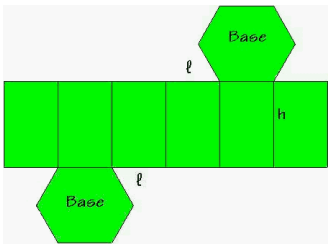
Consideremos um plano P sobre o qual estão apoiados dois sólidos com a mesma altura. Se todo plano paralelo ao plano dado interceptar os sólidos com seções de áreas iguais, então os volumes dos sólidos também serão iguais.

Prisma regular

É um prisma reto cujas bases são regiões poligonais regulares.

Exemplos:
Um prisma triangular regular é um prisma reto cuja base é um triângulo equilátero.
Um prisma quadrangular regular é um prisma reto cuja base é um quadrado.

Planificação do prisma



Um prisma é um sólido formado por todos os pontos do espaço localizados dentro dos planos que contêm as faces laterais e os planos das bases. As faces laterais e as bases formam a envoltória deste sólido. Esta envoltória é uma "superfície" que pode ser planificada no plano cartesiano.

Tal planificação se realiza como se cortássemos com uma tesoura esta envoltória exatamente sobre as arestas para obter uma região plana formada por áreas congruentes às faces laterais e às bases.

A planificação é útil para facilitar os cálculos das áreas lateral e total.

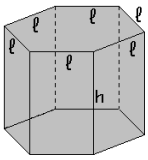
Volume de um prisma

O volume de um prisma é dado por:

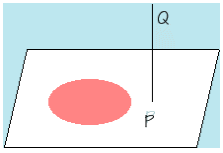
Vprisma = Abase . h

Área lateral de um prisma reto com base poligonal regular

A área lateral de um prisma reto que tem por base uma região poligonal regular de n lados é dada pela soma das áreas das faces laterais. Como neste caso todas as áreas das faces laterais são iguais, basta tomar a área lateral como:



Cilindros

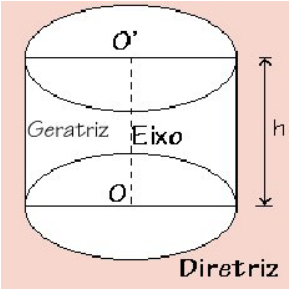


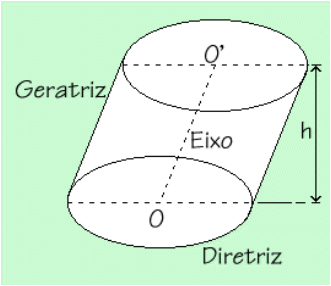
Seja P um plano e nele vamos construir um círculo de raio r. Tomemos também um segmento de reta PQ que não seja paralelo ao plano P e nem esteja contido neste plano P.

Um cilindro circular é a reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a PQ com uma extremidade no círculo.

Observamos que um cilindro é uma superfície no espaço R^3, mas muitas vezes vale a pena considerar o cilindro com a região sólida contida dentro do cilindro. Quando nos referirmos ao cilindro como um sólido usaremos aspas, isto é, "cilindro" e quando for à superfície, simplesmente escreveremos cilindro.

A reta que contém o segmento PQ é denominada geratriz e a curva que fica no plano do "chão" é a diretriz.





Em função da inclinação do segmento PQ em relação ao plano do "chão", o cilindro será chamado reto ou oblíquo, respectivamente, se o segmento PQ for perpendicular ou oblíquo ao plano que contém a curva diretriz.

Objetos geométricos em um "cilindro"

Num cilindro, podemos identificar vários elementos:

- **Base**É a região plana contendo a curva diretriz e todo o seu interior. Num cilindro existem duas bases.
- **Eixo**É o segmento de reta que liga os centros das bases do «cilindro».
- **Altura**A altura de um cilindro é a distância entre os dois planos paralelos que contêm as bases do "cilindro".
- **Superfície Lateral**É o conjunto de todos os pontos do espaço, que não estejam nas bases, obtidos pelo deslocamento paralelo da geratriz sempre apoiada sobre a curva diretriz.
- **Superfície Total**É o conjunto de todos os pontos da superfície lateral reunido com os pontos das bases do cilindro.
- **Área lateral**É a medida da superfície lateral do cilindro.
- **Área total**É a medida da superfície total do cilindro.
- **Seção meridiana de um cilindro**É uma região poligonal obtida pela interseção de um plano vertical que passa pelo centro do cilindro com o cilindro.

Classificação dos cilindros circulares

Cilindro circular oblíquo Apresenta as geratrizes oblíquas em relação aos planos das bases.

Cilindro circular reto As geratrizes são perpendiculares aos planos das bases. Este tipo de cilindro é também chamado de cilindro de revolução, pois é gerado pela rotação de um retângulo.

Cilindro eqüiláteroÉ um cilindro de revolução cuja seção meridiana é um quadrado.

Volume de um "cilindro"

Em um cilindro, o volume é dado pelo produto da área da base pela altura.

$V = A_{base} \times h$

Se a base é um círculo de raio r, então:

$V = \pi r^2 h$

Áreas lateral e total de um cilindro circular reto

Quando temos um cilindro circular reto, a área lateral é dada por:

$A_{lat} = 2 \pi r h$

onde **r** é o raio da base e **h** é a altura do cilindro.

$A_{tot} = A_{lat} + 2 A_{base}$

$A_{tot} = 2 \pi r h + 2 \pi r^2$

$A_{tot} = 2 \pi r(h+r)$

Exercícios resolvidos

QUESTÃO 01

Dado o cilindro circular equilátero (h = 2r), calcular a área lateral e a área total.

QUESTÃO 02

Seja um cilindro circular reto de raio igual a 2cm e altura 3cm. Calcular a área lateral, área total e o seu volume.

QUESTÃO 03

As áreas das bases de um cone circular reto e de um prisma quadrangular reto são iguais. O prisma tem altura 12 cm e volume igual ao dobro do volume do cone. Determinar a altura do cone.

QUESTÃO 04

Anderson colocou uma casquinha de sorvete dentro de uma lata cilíndrica de mesma base, mesmo raio R e mesma altura h da casquinha. Qual é o volume do espaço (vazio) compreendido entre a lata e a casquinha de sorvete?

QUESTÃO 05

Um paralelepípedo tem dimensões 3 cm, 4 cm e 5 cm. Determinar a área total e o volume desse paralelepípedo.

QUESTÃO 06

Determinar a área total e o volume de um cubo de aresta igual a 5 m.

QUESTÃO 07

Uma esfera tem raio 4 cm, determine a área e o volume dessa esfera.

QUESTÃO 08

Uma pirâmide tem base quadrada com aresta da base medindo 5 cm e altura 8 cm. Calcular o volume dessa pirâmide.

Resoluções

1)Solução: No cilindro equilátero, a área lateral e a área total é dada por:

$A_{lat} = 2 \pi r. 2r = 4 \pi r^2$

$A_{tot} = A_{lat} + 2 A_{base}$

$A_{tot} = 4 \pi r^2 + 2 \pi r^2 = 6 \pi r^2$

$V = A_{base} h = \pi r^2. 2r = 2 \pi r^3$

2) Solução: Cálculo da Área lateral$A_{lat} = 2 \pi r h = 2 \pi 2.3 = 12 \pi cm^2$

Cálculo da Área total$A_{tot} = A_{lat} + 2 A_{base}A_{tot} = 12 \pi + 2 \pi 2^2 = 12 \pi + 8 \pi = 20 \pi cm^2$

Cálculo do Volume$V = Abase \times h = \pi r^2 \times hV = \pi 2^2 \times 3 = \pi \times 4 \times 3 = 12 \pi cm^{33}$

3) Solução:

$h_{prisma} = 12$

$A_{base\ do\ prisma} = A_{base\ do\ cone} = A$

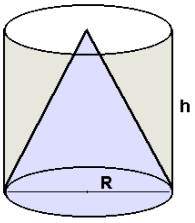
$V_{prisma} = 2 V_{cone}$

$A\ h_{prisma} = 2(A\ h)/3$

$12 = 2.h/3$

$h = 18$ cm

4) Solução:



$V = V_{cilindro} - V_{cone}$

$V = A_{base} h - (1/3) A_{base} h$

$V = Pi R^2 h - (1/3) Pi R^2 h$

$V = (2/3) Pi R^2 h\ cm^3$

5. Solução: Temos a = 3 cm, b = 4 cm e c = 5 cm.
$A_t = 2.(ab + ac + bc)$
$A_t = 2.(3.4 + 3.5 + 4.5)$
$A_t = 2.(12 + 15 + 20)$
$A_t = 2.47$
$A_t = 94\ cm^3$

$V = abc$
$V = 3.4.5$
$V = 60\ cm^3$

6. Solução: a = 5 m
$A_t = 6.a^2$
$A_t = 6.5^2$
$A_t = 6.25$
$A_t = 150\ m^2$

$V = a^3$
$V = 5^3$
$V = 125\ m^3$

7. Solução: R = 4 cm

$A = 4\pi R^2$
$A = 4\pi 4^2$
$A = 4\pi 16$
$A = 64\pi\ cm^2$

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$V = \frac{4\pi 4^3}{3}$$

$$V = \frac{4\pi.64}{3} = \frac{256\pi}{3}\ cm^3$$

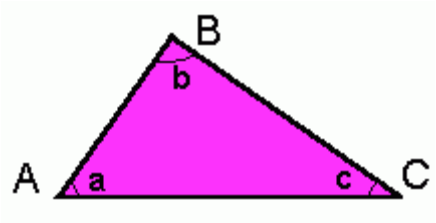
8. Solução:
O volume da pirâmide é dado por $V = \frac{1}{3}.A_b.h.$.
Se a sua base é um quadrado, temos:

$A_b = l^2$
$A_b = 5^2$
$A_b = 25$

$$V = \frac{1}{3}.25.8 = \frac{200}{3}\ cm^3$$

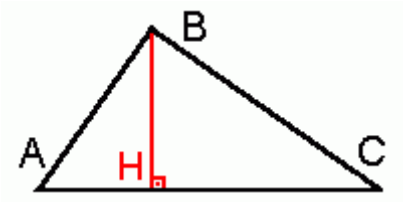
TRIÂNGULOS

Triângulo é um polígono de três lados. É o polígono que possui o menor número de lados. É o único polígono que não tem diagonais. Todo triângulo possui alguns elementos e os principais são: vértices, lados, ângulos, alturas, medianas e bissetrizes.

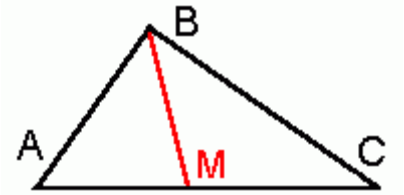


1. Vértices: A, B e C.
2. Lados: $\overline{AB}$,$\overline{BC}$ e $\overline{AC}$.
3. Ângulos internos: a, b e c.

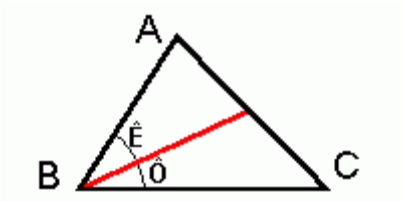
Altura: É um segmento de reta traçada a partir de um vértice de forma a encontrar o lado oposto ao vértice formando um ângulo reto. $\overline{BH}$ é uma altura do triângulo.



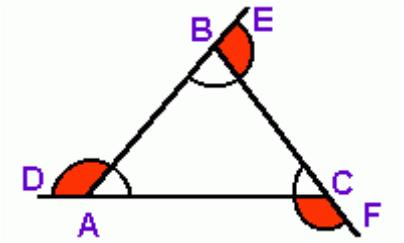
Mediana: É o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto. $\overline{BM}$ é uma mediana.



Bissetriz: É a semi-reta que divide um ângulo em duas partes iguais. O ângulo $\hat{B}$ está dividido ao meio e neste caso $\hat{E} = \hat{O}$.



Ângulo Interno: Todo triângulo possui três ângulos internos, na figura são $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$



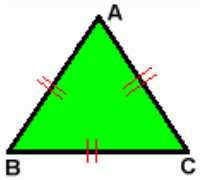
Ângulo Externo: É formado por um dos lados do triângulo e pelo prolongamento do lado adjacente a este lado, na figura são $\hat{D}, \hat{E}$ e $\hat{F}$ (assinalados em vermelho).

CLASSIFICAÇÃO

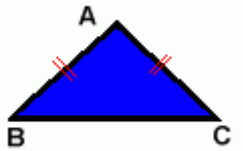
O triângulo pode ser classificado de duas maneiras:

1- Quanto aos lados:

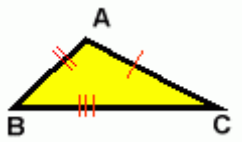
Triângulo Equilátero: Os três lados têm medidas iguais, $m(\overline{AB}) = m(\overline{BC}) = m(\overline{AC})$ e os três ângulos iguais.



Triângulo Isósceles: Tem dois lados com medidas iguais, $m(\overline{AB}) = m(\overline{AC})$ e dois ângulos iguais.

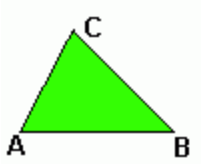


Triângulo Escaleno: Todos os três lados têm medidas diferentes, $m(\overline{AB}) \neq m(\overline{AB}) \neq m(\overline{BC})$ e os três ângulos diferentes.

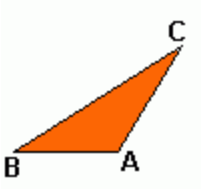


2- Quanto aos ângulos:

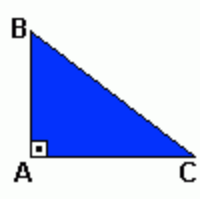
Triângulo Acutângulo: Todos os ângulos internos são agudos, isto é, as medidas dos ângulos são menores do que 90°.



Triângulo Obtusângulo: Um ângulo interno é obtuso, isto é, possui um ângulo com medida maior do que 90°.

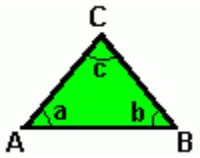


Triângulo Retângulo: Possui um ângulo interno reto (90° graus).



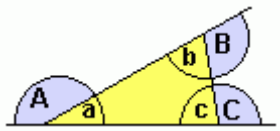
PROPRIEDADE DOS ÂNGULOS

1- Ângulos Internos: a soma dos três ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180°.



a + b + c = 180°

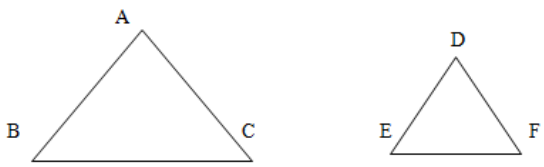
2- Ângulos Externos: Consideremos o triângulo ABC onde as letras minúsculas representam os ângulos internos e as respectivas letras maiúsculas os ângulos externos. Temos que em todo triângulo cada ângulo externo é igual à soma de dois ângulos internos apostos.



$\hat{A} = \hat{b} + \hat{c}$; $\hat{B} = \hat{a} + \hat{c}$ e $\hat{C} = \hat{a} + \hat{b}$

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Dois triângulos são semelhantes se tiverem, entre si, os lados correspondentes **proporcionais** e os ângulos congruentes (iguais).



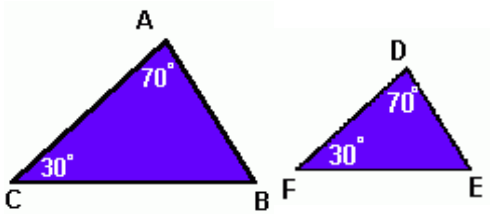
Dados os triângulos acima, onde:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$$

e $\hat{A} = \hat{D}$ $\hat{B} = \hat{E}$ $\hat{C} = \hat{F}$, então os triângulos ABC e DEF são semelhantes e escrevemos ABC~DEF.

CRITÉRIOS DE SEMELHANÇA

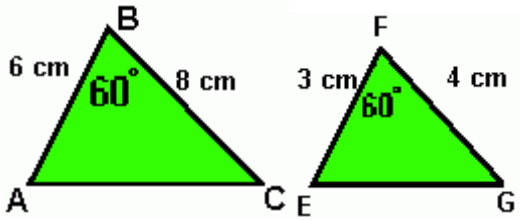
1- **Dois ângulos congruentes:** Se dois triângulos tem, entre si, dois ângulos correspondentes congruentes iguais, então os triângulos são semelhantes.



Nas figuras ao lado: $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{C} = \hat{F}$

então: ABC ~ DEF

2- **Dois lados congruentes:** Se dois triângulos tem dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos formados por esses lados também são congruentes, então os triângulos são semelhantes.

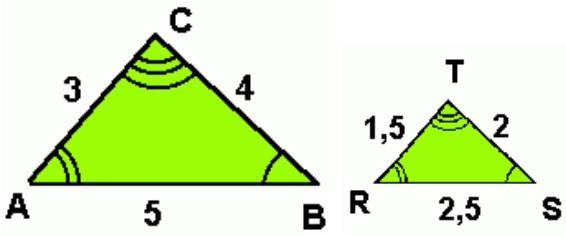


Nas figuras ao lado:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} \rightarrow \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2$$

então: ABC ~ EFG

3- **Três lados proporcionais:** Se dois triângulos têm os três lados correspondentes proporcionais, então os triângulos são semelhantes.



Nas figuras ao lado:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{RT}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{RS}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{ST}} \rightarrow \frac{3}{1,5} = \frac{5}{2,5} = \frac{4}{2} = 2$$

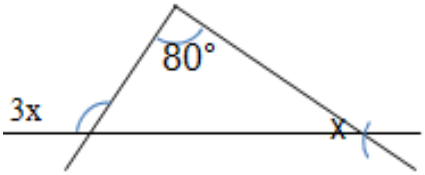
então: ABC ~ RST

Observação: temos três critérios de semelhança, porém o mais utilizado para resolução de exercícios, isto é, para provar que dois triângulos são semelhantes, basta provar que eles tem dois ângulos correspondentes congruentes (iguais).

Exercícios resolvidos

QUESTÃO 01

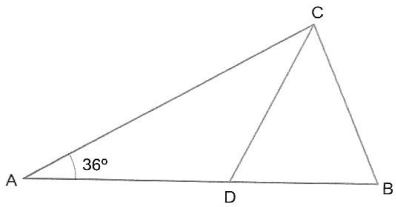
O valor de x na figura abaixo é:



a) 30°
b) 40°
c) 50°
d) 60°
e) 70°

QUESTÃO 02

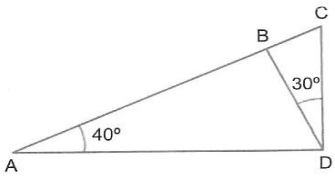
Na figura abaixo $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{CB} = \overline{CD}$, a medida do ângulo $D\hat{C}B$ é:



a) 34°
b) 72°
c) 36°
d) 45°
e) 30°

QUESTÃO 03

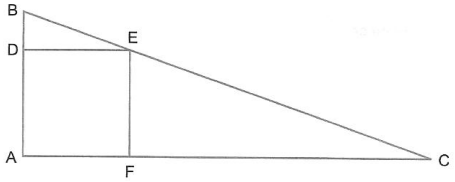
Na figura seguinte, o ângulo $A\hat{D}C$ é reto. O valor em graus do ângulo $C\hat{B}D$ é igual a:



a) 120°
b) 110°
c) 105°
d) 100°
e) 95°

QUESTÃO 04

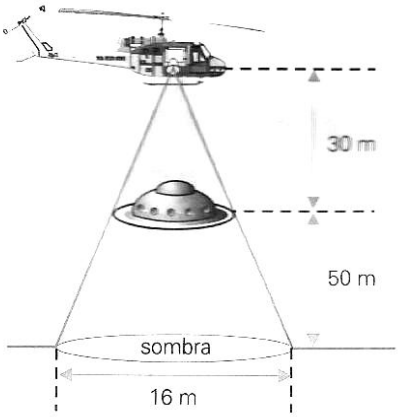
Na figura abaixo, o triângulo ABC é retângulo em A, ADEF é um quadrado, AB = 1 e AC = 3. Quanto mede o lado do quadrado?



a) 0,70
b) 0,75
c) 0,80
d) 0,85
e) 0,90

QUESTÃO 05

Em uma cidade do interior, à noite, surgiu um objeto voador não identificado, em forma de disco, que estacionou a aproximadamente 50 m do solo. Um helicóptero do Exército, situado a aproximadamente 30 m acima do objeto iluminou-o com um holofote, conforme mostra a figura seguinte. A sombra projetada pelo disco no solo tinha em torno de 16 m de diâmetro.



Sendo assim, pode-se concluir que a medida, em metros, do raio desse disco-voador é aproximadamente:

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

Resoluções

1) **Alternativa b**

Solução:

Da figura temos que 3x é um ângulo externo do triângulo e, portanto, é igual à soma dos dois internos opostos, então:

3x = x + 80°
3x – x = 80°
2x = 80°
x = 80° : 2
x = 40°

2) **Alternativa c**

Solução:

Na figura dada, temos três triângulos: ABC, ACD e BCD. Do enunciado AB = AC, o triângulo ABC tem dois lados iguais, então ele é isósceles e tem dois ângulos iguais:

$A\hat{C}B = A\hat{B}C = x$. A soma dos três ângulos é igual a 180°.

36° + x + x = 180°
2x = 180° - 36°
2x = 144
x = 144 : 2
x = 72

Logo: $A\hat{C}B = A\hat{B}C = 72°$

Também temos que CB = CD, o triângulo BCD é isósceles:

$C\hat{B}D = C\hat{D}B = 72°$, sendo y o ângulo $D\hat{C}B$, a soma é igual a 180°.

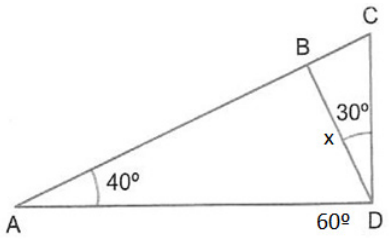
72° + 72° + y = 180°
144° + y = 180°
y = 180° - 144°
y = 36°

3) **Alternativa d**

Solução:

Na figura temos três triângulos. Do enunciado o ângulo $A\hat{D}C = 90°$ (reto).

O ângulo $B\hat{D}C = 30° \rightarrow A\hat{D}B = 60°$.

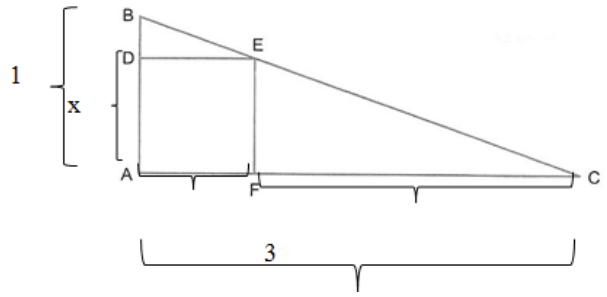


O ângulo $C\hat{B}D$ (x) é ângulo externo do triângulo ABD, então:

x = 60° + 40° (propriedade do ângulo externo)
x = 100°

4) **Alternativa b**

Solução: sendo x o lado do quadrado:



Temos que provar que dois dos triângulos da figura são semelhantes.

O ângulo $B\hat{A}C$ é reto, o ângulo $C\hat{F}E$ é reto e o ângulo $A\hat{C}B$ é comum aos triângulos ABC e CEF, logo estes dois triângulos são semelhantes. As medidas de seus lados correspondentes são proporcionais:

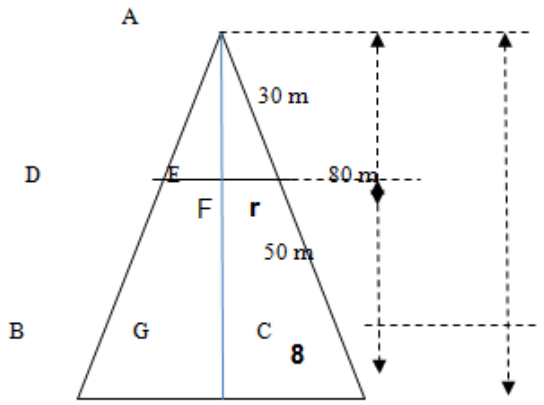
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CF}}$$

$\frac{1}{x} = \frac{3}{3-x}$ (multiplicando em "cruz")

3x = 1.(3 – x)
3x = 3 – x
3x + x = 3
4x = 3
x = ¾
x = 0,75

5) **Alternativa a**

Solução: da figura dada, podemos observar os seguintes triângulos:



Os triângulos ABC e ADE são isósceles. A altura divide as bases em duas partes iguais. E esses dois triângulos são semelhantes, pois os dois ângulos das bases de cada um são congruentes. Então:

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AF}}$$

$$\frac{8}{r} = \frac{8\cancel{0}}{3\cancel{0}}$$

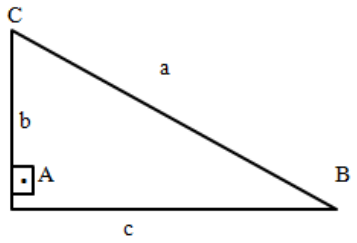
$$\cancel{8}r = \cancel{8}.3$$

$$r = 3 \text{ m}$$

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Em todo triângulo retângulo os lados recebem nomes especiais. O maior lado (oposto do ângulo de 90°) é chamado de Hipotenusa e os outros dois lados menores (opostos aos dois ângulos agudos) são chamados de Catetos.

Observe a figura:



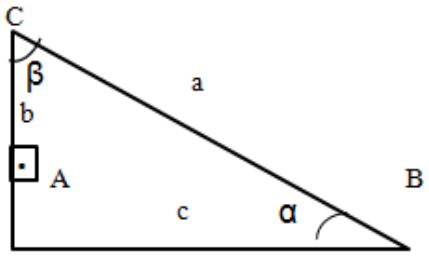
- a é a hipotenusa.
- b e c são os catetos

Para estudo de Trigonometria, são definidos no triângulo retângulo, três razões chamadas trigonométricas: seno, cosseno e tangente.

$$- sen = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto}{medida\ da\ hipotenusa}$$

$$- cos = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente}{medida\ da\ hipotenusa}$$

$$- tg = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto}{medida\ do\ cateto\ adjacente}$$



No triângulo acima, temos:

- $sen\alpha = \frac{b}{a}$
- $cos\alpha = \frac{c}{a}$
- $tg\alpha = \frac{b}{c}$

$sen\beta = \frac{c}{a}$

$cos\beta = \frac{b}{a}$

$tg\beta = \frac{c}{b}$

Como podemos notar, sena=cosβ e senβ=cosa.

Em todo triângulo a soma dos ângulos internos é igual a 180°.

No triângulo retângulo um ângulo mede 90°, então:

90° + a + β = 180°

a + β = 180° - 90°

a + β = 90°

Quando a soma de dois ângulos é igual a 90°, eles são chamados de Ângulos Complementares. E, neste caso, sempre o seno de um será igual ao cosseno do outro.

Valores Notáveis

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Relações Fundamentais da Trigonometria

I) $sen^2 + cos^2 = 1$

II) $tgx = \frac{sen}{cosx}$

III) $cotgx = \frac{cosx}{senx}$

VI) $secx = \frac{1}{cosx}$

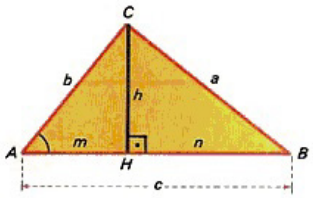
V) $cossecx = \frac{1}{senx}$

Nestas relações, além do senx e cosx, temos: tg (tangente), cotg (cotangente), sec (secante) e cossec (cossecante).

Relações Métricas em um triângulo qualquer

1- Lado oposto a um ângulo agudo do Triangulo.

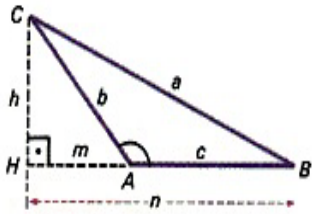
Temos a seguinte relação: "Num triângulo qualquer, o quadrado da medida do lado a um ângulo agudo é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos duas vezes o produto de um desses lados pela medida da projeção do outro lado sobre ele".



No triângulo da figura ao lado:
$a^2 = b^2 + c^2$ - 2cm

2- Lado oposto a um ângulo obtuso do Triângulo.

Temos a seguinte relação: "Num triângulo obtusângulo, o quadrado da medida do lado oposto ao ângulo obtuso é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados mais duas vezes o produto de um desses lados pela medida da projeção do outro lado sobre ele".



No triângulo da figura ao lado:
$a^2 = b^2 + c^2$ + 2cm

Natureza dos Triângulos

Quantos aos ângulos, um triângulo pode ser classificado em Acutângulo (tem os três ângulos agudos), Obtusângulo (tem um ângulo obtuso) e Retângulo (tem um ângulo reto).

Sendo **a**, **b** e **c** os três lados de um triângulo e, **a** é o **maior lado**, temos:

I) **$a^2 = b^2 + c^2$ → o triângulo é retângulo (Teorema de Pitágoras).**

II) **$a^2 < b^2 + c^2$ → o triângulo é acutângulo.**

III) **$a^2 > b^2 + c^2$ → o triângulo é obtusângulo.**

Exercícios resolvidos

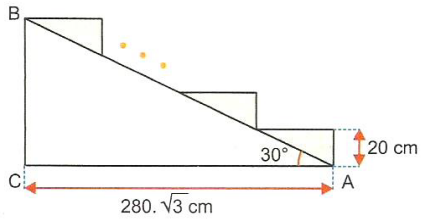
QUESTÃO 01

Um avião levanta voo formando um ângulo de 30° com a horizontal. Sua altura, em metros, após ter percorridos 600 m será:

a) 100
b) 200
c) 300
d) 400
e) 500

QUESTÃO 02

(UDESC) Sobre um plano inclinado deverá ser construída uma escadaria.

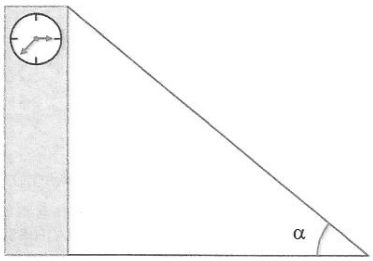


Sabendo-se que cada degrau da escada deverá ter um altura de 20 cm e que a base do plano inclinado medem cm, conforme mostra a figura acima, então, a escada deverá ter:

a) 10 degraus
b) 28 degraus
c) 14 degraus
d) 54 degraus
e) 16 degraus

QUESTÃO 03

(FUVEST) A uma distância de 40 m, uma torre é vista sob um ângulo , como mostra a figura.



Sabendo que sen20° = 0,342 e cos20° = 0,940, a altura da torre, em metros, será aproximadamente:

a) 14,552
b) 14,391
c) 12,552
d) 12,391
e) 16,552

QUESTÃO 04

U. Estácio de Sá) Simplificando a expressão $y = sen17º.cotg17°.cotg73°.sec73°$, encontramos:

a) – 2
b) – 1
c) 2
d) 1
e) 5

QUESTÃO 05

Qual das afirmativas abaixo é falsa:

a) $sen^3x + cos^3x = 1$

b) $tgx = \frac{senx}{cosx}$

c) $sen^2x + cos^2x = 1$

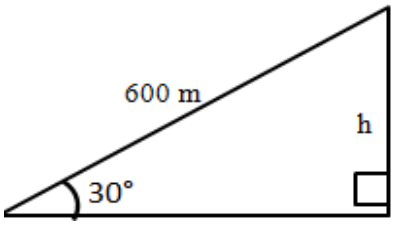
d) $secx = \frac{1}{cosx}$

e) senx + cosx = 1

Resoluções

01- **Alternativa c**

Solução: do enunciado temos a seguinte figura.



600 m é a hipotenusa e h é o cateto oposto ao ângulo dado, então temos que usar o seno.

$$\text{sen}30° = \frac{\text{cat. oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$\frac{1}{2} = \frac{h}{600}$ ➔ 2h = 600 ➔ h = 600 : 2 = 300 m

02- **Alternativa c**

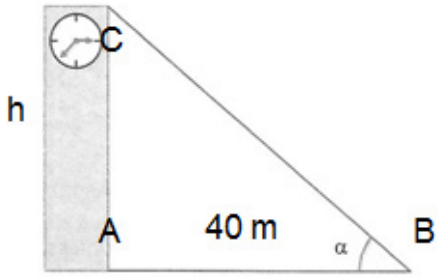
Solução: para saber o número de degraus temos que calcular a altura do triângulo e dividir por 20 (altura de cada degrau). No triângulo ABC, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ são catetos, a relação entre os dois catetos é a tangente.

$$tg30° = \frac{cat.oposto}{cat.adjacente} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\overline{BC}}{280\sqrt{3}}$ ➔ $3.\overline{BC} = 280\sqrt{3}.\sqrt{3}$ ➔ $3.\overline{BC} = \cancel{280}.3$ ➔ $\overline{BC} = 2\cancel{80}$ cm

Número de degraus = 280 : 20 = 14

03- **Alternativa a**
Solução: observando a figura, nós temos um triângulo retângulo, vamos chamar os vértices de A, B e C.



Como podemos ver h e 40 m são catetos, a relação a ser usada é a tangente. Porém no enunciado foram dados o sen e o cos. Então, para calcular a tangente, temos que usar a relação fundamental:

$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$ ➔ $tg\alpha = \frac{0,342}{0,940}$ ➔ tgα = 0,3638

$tg\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ ➔ $0,363 = \frac{h}{40}$ ➔ h = 40.0,363 ➔ h = 14,552 m

04- **Alternativa d**
Solução: temos que usar as relações fundamentais.

$$y = \cancel{sen17°}.\frac{cos17°}{\cancel{sen17°}}.\frac{\cancel{cos73°}}{sen73°}.\frac{1}{\cancel{cos73°}}$$

$$y = \frac{cos17°}{sen73°}$$

Sendo 17° + 73° = 90° (ângulos complementares), lembrando que quando dois ângulos são complementares o seno de um deles é igual ao cosseno do outro, resulta que sen73° = cos17°. Então:

$$y = \frac{cos17°}{cos17°} = 1\,,$$

05- **Alternativa e**
Solução: teórico.

• CONHECIMENTOS DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE – REPRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS; MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL (MÉDIAS, MODA E MEDIANA); DESVIOS E VARIÂNCIA; NOÇÕES DE PROBABILIDADE.

CONCEITOS BÁSICOS DE PROBABILIDADE

Para que se possa realizar inferências sobre a população, é necessário que se trabalhe com amostragem probabilística. É o método que garante segurança quando investiga-se alguma hipótese. Normalmente os indivíduos investigados possuem a mesma probabilidade de ser selecionado na amostra.

Aleatória Simples: É o mais utilizado processo de amostragem. Prático e eficaz, confere precisão ao processo de amostragem. Normalmente utiliza-se uma tabela de números aleatórios e nomeia-se os indivíduos, sorteando-se um por um até completar a amostra calculada. Uma variação deste tipo de amostragem é a sistemática. Em um grande número de exemplos, o pesquisador depara-se com a população ordenada. Neste sentido, tem-se os indivíduos dispostos em sequência o que dificulta a aplicação exata desta técnica. Quando se trabalha com sorteio de quadras de casas por exemplo, há uma regra crescente para os números das casas. Em casos como este, divide-se a população pela amostra e obtém-se um coeficiente (y).

A primeira casa será a de número x, a segunda será a de número x + y; a terceira será a de número x + 3. y. Supondo que este coeficiente seja 6. O primeiro elemento será 3. O segundo será 3 + 6. O terceiro será 3 + 2.6. O quarto será 3 + 3.6, e assim sucessivamente.

Aleatória Estratificada: Quando se deseja guardar uma proporcionalidade na população heterogênea. Estratifica-se cada subpopulação por intermédio de critérios como classe social, renda, idade, sexo, entre outros.

Conglomerado: Em corriqueiras situações, torna-se difícil coletar características da população. Nesta modalidade de amostragem, sorteia-se um conjunto e procura-se estudar todo o conjunto. É exemplo de amostragem por conglomerado, famílias, organizações e quarteirões.

A história da teoria das probabilidades, teve início com os jogos de cartas, dados e de roleta. Esse é o motivo da grande existência de exemplos de jogos de azar no estudo da probabilidade. A teoria da probabilidade permite que se calcule a chance de ocorrência de um número em um experimento aleatório.

Experimento Aleatório: É aquele experimento que quando repetido em iguais condições, podem fornecer resultados diferentes, ou seja, são resultados explicados ao acaso. Quando se fala de tempo e possibilidades de ganho na loteria, a abordagem envolve cálculo de experimento aleatório.

Espaço Amostral: É o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. A letra que representa o espaço amostral, é S.

Exemplo: Lançando uma moeda e um dado, simultaneamente, sendo S o espaço amostral, constituído pelos 12 elementos: S = {K1, K2, K3, K4, K5, K6, R1, R2, R3, R4, R5, R6}

- Escreva explicitamente os seguintes eventos: A={caras e m número par aparece}, B={um número primo aparece}, C={coroas e um número ímpar aparecem}.

- Idem, o evento em que:

a) A ou B ocorrem;

b) B e C ocorrem;

c) Somente B ocorre.

- Quais dos eventos A,B e C são mutuamente exclusivos .

Resolução:

- Para obter A, escolhemos os elementos de S constituídos de um K e um número par: A={K2, K4, K6}; Para obter B, escolhemos os pontos de S constituídos de números primos: B={K2,K3,K5,R2,R3,R5}; Para obter C, escolhemos os pontos de S constituídos de um R e um número ímpar: C={R1,R3,R5}.

- (a) A ou B = AUB = {K2,K4,K6,K3,K5,R2,R3,R5}; (b) B e C = B Ç C = {R3,R5}; (c) Escolhemos os elementos de B que não estão em A ou C; B Ç A^c ÇC^c = {K3,K5,R2}.

- A e C são mutuamente exclusivos, porque A Ç C = Æ.

Conceito de Probabilidade: Se em um fenômeno aleatório as possibilidades são igualmente prováveis, então a probabilidade de ocorrer um evento A é:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Por, exemplo, no lançamento de um dado, um número par pode ocorrer de 3 maneiras diferentes dentre 6 igualmente prováveis, portanto, P = 3/6= 1/2 = 50%

Dizemos que um espaço amostral S (finito) é equiprovável quando seus eventos elementares têm probabilidades iguais de ocorrência.

Num espaço amostral equiprovável S (finito), a probabilidade de ocorrência de um evento A é sempre:

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos de A}}{\text{número de elementos de S}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Exercícios resolvidos

QUESTÃO 01

(Unesp) Numa pesquisa feita com 200 homens, observou-se que 80 eram casados, 20 eram separados, 10 eram viúvos e 90 eram solteiros. Escolhido um homem ao acaso, a probabilidade de ele não ser solteiro é:

a) 0,65
b) 0,6
c) 0,55
d) 0,5
e) 0,35

QUESTÃO 02

A probabilidade de uma bola branca aparecer ao retirar-se uma única bola de uma urna contendo 4 bolas brancas, 3 vermelhas e 5 azuis, é:

a) 1/3
b) ½
c) ¼
d) 1/12
e) 1/5

QUESTÃO 03

O número da chapa de um carro é par. A probabilidade de o algarismo das unidades ser zero é:

a) 1/10
b) ½
c) 4/9
d) 5/9
e) 1/5

QUESTÃO 04

(FUVEST) Ao lançar um dado muitas vezes, uma pessoa percebeu que a face "6" saía com o dobro da freqüência da face "1" e que as outras faces saíam com a freqüência esperada de um dado não viciado. Qual a freqüência da face "1"?

a) 1/3
b) 2/3
c) 1/9
d) 2/9
e) 1/12

QUESTÃO 05

De uma urna que contém bolas numeradas de 1 a 100 será retirada uma bola. Sabendo-se que qualquer uma das bolas tem a mesma chance de ser retirada, qual a probabilidade de se retirar uma bola, cujo número é um quadrado perfeito ou um cubo perfeito?

a) 0,14
b) 0,1
c) 0,12
d) 0,16
e) 0,2

Resoluções

01- Solução:

Num total de 200 homens, para não ser solteiro, ele tem que ser casado, separado ou viúvo. Então, temos:

80 + 20 + 10 = 110 (soma de casados, separados e viúvos)

$P(não\ ser\ solteiro) = \frac{110}{200} = 0{,}55$

Alternativa c

02- Solução

Nesta urna temos um total de 4 + 3 + 5 = 12 bolas e 4 são brancas, então:

$$P(branca) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Alternativa a

GRUPO NOVA

03- Solução

Para ser par a placa tem que terminar com 0, 2, 4, 6 ou 8; num total de 5 chances e para ser zero temos 1 chance somente, então:

$$P(ser\ zero) = \frac{1}{5}$$

Alternativa e

04- Solução

Quando lançamos uma dado a probabilidade esperada de sair qualquer número é 1/6. Do enunciado para sair os números 2, 3 4 e 5 é 1/6 para cada um deles e, se a probabilidade de sair o 1 é x, de sair o 6 é o dobro: 2x. E a soma de todas as probabilidades é igual a 1 inteiro. Então:

$$x + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 2x = 1$$

$$3x + \frac{4}{6} = 1 \text{ (o mmc é 6)}$$

$$\frac{18x+4}{\cancel{6}} = \frac{6}{\cancel{6}}$$

$$18x = 6 - 4$$
$$18x = 2$$

$$x = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

Alternativa c

05- Solução

Temos um total de 100 bolas cujos números vão de 1 a 100, então:

Quadrado perfeito: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 e 100 (10 números).

Cubo perfeito: 1, 8, 27 e 64 (4 números).

Teríamos 10 + 4 = 14 números (quadrado ou cubo perfeito), porém os números 1 e 64 aparecem no dois, portanto devem ser descontados. Logo, temos 14 – 2 = 12.

$$P(quadrado\ ou\ cubo\ perfeito) = \frac{12}{100} = 0{,}12$$

Alternativa c

ESTATÍSTICA

MÉDIAS

Sendo dados n números reais, x_1, x_2, x_3, x_4,.....,x_n, definimos:

- **Média aritmética**: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots\ldots + x_n}{n}$

- **Média geométrica**: $\bar{x} = \sqrt[n]{x_1 . x_2 . x_3 \ldots\ldots x_n}$

- **Média harmônica**: $\bar{x} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots\ldots + \frac{1}{x_n}}{n}}$

ESTATÍSTICA

Estatística é um ramo da Matemática Aplicada. A palavra estatística provém da palavra latina Status.

É ciência quando estuda populações; é método, quando serve de instrumento a uma outra ciência.

Vejamos algumas definições:

- **População**: é um conjunto de elementos com uma característica comum. O termo é mais amplo que no senso comum, pois envolve aglomerado de pessoas, objetos ou mesmo idéias.

- **Amostras**: são subconjuntos da população, que conservam, portanto, a característica comum da população e são retiradas por técnicas adequadas chamadas de amostragem.

- **Parâmetros**: são as características numéricas da população.

- **Estimativas**: em geral, por problemas de tempo e dinheiro, trabalha-se com amostras e não com a população.

- **Dados Brutos**: é o conjunto dos dados numéricos obtidos e que ainda não foram organizados.

- **Rol**: é o arranjo dos dados brutos em ordem crescente.

- **Amplitude total (H)**: é a diferença entre o maior e o menor dos valores observados.

- **Frequência**: é o número de vezes (a quantidade) que um número aparece entre os dados coletados.

- **Medidas de posição**: as medidas de posição servem para localizar os dados sobre o eixo das variáveis em questão. As mais importantes são: **média**, **mediana** e **moda**.

A) **Média**: é a soma de todos os dados, dividida pelo número de dados coletados.

B) **Mediana**: é o valor **central** do Rol. Quando temos um **número ímpar de dados** é o valor que esta exatamente no centro do Rol; quando temos um **número par de dados** é a média aritmética entre os dois valores centrais do Rol.

c) **Moda**: é o valor com maior frequência (o que aparece mais vezes) dos dados coletados. Se houver dois valores com maior frequência temos duas modas e dizemos que é **bimodal**; se houver três valores com maior frequência temos três modas e dizemos que é **trimodal**; e assim por diante.... Se todos os valores tem a mesma frequência, então não temos um valor da moda e dizemos que é **amodal**.

Exercícios resolvidos

QUESTÃO 01

O valor das médias aritmética e geométrica entre números 6, 4 e 9 são respectivamente iguais a:

a) 6 e 6,3
b) 6,3 e 6
c) 6,8 e 9
d) 4 e 6
e) 6,5 e 5

QUESTÃO 02

(ESPM) A nota final de um concurso é dada pela média aritmética das notas de todas as prova realizadas. Se um candidato conseguiu x notas 8, x + 1 notas 6 e x – 1 notas 5 e sua nota final foi 6,5. O número de provas que ele realizou foi:

a) 6
b) 9
c) 7
d) 5
e) 12

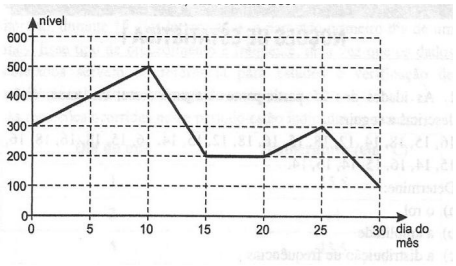
QUESTÃO 03

(INSPER) O gráfico abaixo mostra o nível de água no reservatório de uma cidade, em centímetros. Considerando o mês inteiro, o nível médio de água no reservatório é igual a:

a) 225 cm
b) 250 cm
c) 275 cm
d) 300 cm
e) 325 cm

QUESTÃO 04

(ENEM) A média aritmética dos salários de quatro funcionários de uma empresa era igual a R$ 1.300,00. Ao ser contratado um novo funcionário, a média passou a ser R$ 1.340,00. Qual o salário desse funcionário?



a) R$ 1.200,00
b) R$ 1.350,00
c) R$ 1.400,00
d) R$ 1.450,00
e) R$ 1.500,00

QUESTÃO 05

(FATEC - adaptado) As idades, em anos, de um grupo de sete pessoas são: 16, 8, 13, 8, 10, 8 e m. Sabendo que m > 12 e que a moda, a mediana e a média aritmética das idades desse grupo, nessa ordem, são três termos consecutivos de uma progressão aritmética, não constante, então o valor de m é:

a) 17
b) 19
c) 21
d) 23
e) 25

QUESTÃO 06

(ENEM) Marco e Paulo foram classificados em um concurso. Para a classificação no concurso, o candidato deveria obter média na pontuação igual ou superior a 14. Em caso de empate na média, o desempate seria em favor da pontuação mais regular. No quadro a seguir, são apresentados os pontos obtidos nas provas de Matemática, Português e Conhecimentos Gerais, a média, a mediana e o desvio-padrão dos dois candidatos. O candidato com pontuação mais regular, portanto mais bem classificado no concurso é:

	Matemática	Português	Conhecimentos Gerais	Média	Mediana	Desvio-Padrão
Marco	14	15	16	15	15	0,32
Paulo	8	19	18	15	18	4,97

a) Marco, pois a média e a mediana são iguais.
b) Marco, pois obteve menor desvio-padrão.
c) Paulo, pois obteve a maior pontuação da tabela, 19 em Português.
d) Paulo, pois obteve maior mediana.
e) Paulo, pois obteve maior desvio-padrão.

QUESTÃO 07

Observe o conjunto de dados: 1 1 2 2 2 3 3 4 4 5 6 e indique a alternativa que explicita, nesta ordem, a moda, a mediana e a média aritmética desse conjunto.

a) 3,3,3.
b) 2,3,3.
c) 2,3,2.
d) 2,2,2.
e) 2,2,3.

QUESTÃO 08

(FGV) Numa pequena ilha, há 100 pessoas que trabalham na única empresa ali existente. Seus salários (em moeda local) têm a seguinte distribuição de frequências:

Salários	Frequência
$ 50,00	30
$ 100,00	60
$ 150,00	10

a) Qual a média dos salários das 100 pessoas?
b) Qual a variância dos salários?
c) Qual o desvio-padrão dos salários?

Resoluções

01- Solução:

Média aritmética: $\bar{x} = \frac{6+4+9}{3} = \frac{19}{3} = 6{,}3$

Média geométrica: $\bar{x} = \sqrt[3]{6.4.9} = \sqrt[3]{216} = 6$

Alternativa b

02- Solução

O número de provas realizadas pelo candidato foi x + x + 1 + x – 1 = 3x, se a sua média foi 6,5 temos:

$\bar{x} = 6{,}5$

$\frac{x.8+(x+1).6+(x-1).5}{x+x+1+x-1} = 6{,}5 \rightarrow \frac{8x+6x+6+5x-5}{3x} = 6{,}5 \rightarrow 19x + 1 = 3x.6{,}5$

19x + 1 = 19,5x
1 = 19,5x – 19x
1 = 0,5x

x = 1 : 0,5 = 2

número de provas = 3x = 3.2 = 6

Alternativa a

03- Solução

Sendo **d** o número de dias e M a média em cada período no gráfico, temos que calcular a média de cada parte do gráfico:

Se $0 \leq d \leq 10$ ➔ $M_1 = \frac{500+300}{2} = 400$

Se $10 \leq d \leq 15$ ➔ $M_2 = \frac{500+200}{2} = 350$

Se $15 \leq d \leq 20$ ➔ $M_3 = 200$

Se $20 \leq d \leq 25$ ➔ $M_4 = \frac{300+200}{2} = 250$

Se $25 \leq d \leq 30$ ➔ $M_5 = \frac{300+100}{2} = 200$

$$\bar{x} = \frac{10.M_1+5.M_2+5.M_3+5.M_4+5.M_5}{30}$$

$$\bar{x} = \frac{400.10+350.5+200.5+250.5+200.5}{30} = \frac{4000+1750+1000+1250+1000}{30} = \frac{9000}{30} = 300$$

Alternativa d

04- Solução

Sendo S a soma dos quatro salários e m o salário do novo funcionário:

$$\frac{S}{4} = 1300$$

$$S = 4.1300$$
$$S = 5200$$

Após a entrada do novo funcionário:

$$\frac{S+m}{5} = 1340$$

5200 + m = 5.1340
5200 + m = 6700
m = 6700 – 5200
m = 1500

Alternativa e

05- Solução

O Rol (dados coletados em ordem crescente) dos dados 16, 8, 13, 8, 10, 8 e m, sabendo que m > 12 pode ser: 8, 8, 8, 10, m, 13, 16 ou 8, 8, 8, 10, 13, m, 16 ou ainda 8, 8, 8, 10, 13, 16, m

Em qualquer um deles temos que a mediana (termo central) M_d = 10 e a moda (número que aparece mais vezes) M_o = 8. Do enunciado a moda, a mediana e a média formam, nessa ordem um P.A., então temos: M_o, M_d, é uma P.A. ➔ 8, 10, 12 (P.A. de razão 2), logo a média é 12.

$\bar{x} = 12$

$\frac{8+8+8+10+13+16+m}{7} = 12$

63 + m = 7.12
63 + m = 84
m = 84 – 63
m = 21

Alternativa c

06- Solução

Apesar de Marco e Paulo terem a mesma média (15), Marco tem um desvio padrão menor, o que significa que os pontos obtidos em cada prova estão mais próximos da média.

Alternativa b

07- Solução

Fazendo o Rol (ordem crescente do dados coletados): 1 1 2 2 2 3 3 4 4 5 6

Moda: elemento que aparece mais vezes na amostra ➔ $M_o = 2$

Mediana: elemento central da amostra, quando temos um número ímpar de termos a mediana esta no centro e quando temos um número par de termos a mediana é a média aritmética dos dois termos centrais. No caso acima temos um número ímpar ➔ 1 1 2 2 2 3 3 4 4 5 6 ➔ $M_d = 3$

Média: $M = \frac{2.1+3.2+2.3+2.4+1.5+1.6}{11} = \frac{2+6+6+8+5+6}{11} = \frac{33}{11} = 3$

08- Solução

a) A média é: $\bar{x} = \frac{30.50 + 60.100 + 10.150}{100} = \frac{1500 + 6000 + 1500}{100} = \frac{9000}{100} = 90$

b) Variância é igual à somatória de cada salário menos a média elevado ao quadrado, multiplicado pela frequência, dividido pelo total de pessoas.

$$Var(\bar{x}) = \frac{30.(90-50)^2+60.(90-100)^2+10.(90-150)^2}{100}$$

$$Var(\bar{x}) = \frac{30.40^2+60.(-10)^2+10.(-60)^2}{100}$$

$$Var(\bar{x}) = \frac{30.1600+60.100+10.3600}{100} = \frac{48000+6000+36000}{100}$$

$$Var(\bar{x}) = \frac{90000}{100} = 900$$

c) Desvio padrão (representado por) é igual à raiz quadrada da variância.

$$\delta = \sqrt{Var(\bar{x})}$$

$$\delta = \sqrt{900} = 30$$

• CONHECIMENTOS ALGÉBRICOS – GRÁFICOS E FUNÇÕES; FUNÇÕES ALGÉBRICAS DO 1.º E DO 2.º GRAUS, POLINOMIAIS, RACIONAIS, EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS; EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES; RELAÇÕES NO CICLO TRIGONOMÉTRICO E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.

EQUAÇÃO DO 1º GRAU

Veja estas equações, nas quais há apenas uma incógnita:

$3x - 2 = 16$ (equação de 1º grau)

$2y^3 - 5y = 11$ (equação de 3º grau)

$1 - 3x + \frac{2}{5} = x + \frac{1}{2}$ (equação de 1º grau)

O método que usamos para resolver a equação de 1º grau é isolando a incógnita, isto é, deixar a incógnita sozinha em um dos lados da igualdade. Para conseguir isso, há dois recursos:

- inverter operações;
- efetuar a mesma operação nos dois lados da igualdade.

Exemplo1

Resolução da equação $3x - 2 = 16$, invertendo operações.

Procedimento e justificativa: Se $3x - 2$ dá 16, conclui-se que $3x$ dá $16 + 2$, isto é, 18 (invertemos a subtração). Se $3x$ é igual a 18, é claro que x é igual a 18 : 3, ou seja, 6 (invertemos a multiplicação por 3).

Registro

$3x - 2 = 16$
$3x = 16 + 2$
$3x = 18$
$x = \frac{18}{3}$
$x = 6$

Exemplo 2

Resolução da equação: $1 - 3x + \frac{2}{5} = x + \frac{1}{2}$, efetuando a mesma operação nos dois lados da igualdade.

Procedimento e justificativa: Multiplicamos os dois lados da equação pelo mmc (2;5) = 10. Dessa forma, são eliminados os denominadores. Fazemos as simplificações e os cálculos necessários e isolamos x, sempre efetuando a mesma operação nos dois lados da igualdade. No registro, as operações feitas nos dois lados da igualdade são indicadas com as setas curvas verticais.

Registro

$1 - 3x + 2/5 = x + 1/2 \rightarrow \frac{1.(10) - 3x.(10) + 2.(2)}{\cancel{10}} = \frac{x.(10) + 1.(5)}{\cancel{10}} \rightarrow$
$10 - 30x + 4 = 10x + 5$
$-30x - 10x = 5 - 10 - 4$
$-40x = -9\ (-1)$
$40x = 9$
$x = 9/40$
$x = 0{,}225$

Há também um processo prático, bastante usado, que se baseia nessas ideias e na percepção de um padrão visual.

- Se $\underline{a + b = c}$, conclui-se que $\underline{a = c - b}$.

Na primeira igualdade, a parcela *b* aparece somando no lado esquerdo; na segunda, a parcela *b* aparece subtraindo no lado direito da igualdade.

- Se $\underline{a \cdot b = c}$, conclui-se que $\underline{a = c : b}$, desde que $\underline{b \neq 0}$.

Na primeira igualdade, o número *b* aparece multiplicando no lado esquerdo; na segunda, ele aparece dividindo no lado direito da igualdade.

O processo prático pode ser formulado assim:

- Para isolar a incógnita, coloque todos os termos com incógnita de um lado da igualdade e os demais termos do outro lado.

- Sempre que mudar um termo de lado, inverta a operação.

Exemplo

Resolução da equação $\frac{5(x+2)}{2} = \frac{(x+2).(x-3)}{3} - \frac{x^2}{3}$, usando o processo prático.

Procedimento e justificativa: Iniciamos da forma habitual, multiplicando os dois lados pelo mmc (2;3) = 6. A seguir, passamos a efetuar os cálculos indicados. Neste ponto, passamos a usar o processo prático, colocando termos com a incógnita à esquerda e números à direita, invertendo operações.

Registro

$$\frac{5(x+2)}{2} - \frac{(x+2).(x-3)}{3} = -\frac{x^2}{3}$$

$$6.\frac{5(x+2)}{2} - 6.\frac{(x+2).(x-3)}{3} = 6.\frac{x^2}{3}$$

$15(x + 2) - 2(x + 2)(x - 3) = -2x^2$
$15x + 30 - 2(x^2 - 3x + 2x - 6) = -2x^2$
$15x + 30 - 2(x^2 - x - 6) = -2x^2$
$15x + 30 - 2x^2 + 2x + 12 = -2x^2$
$17x - 2x^2 + 42 = -2x^2$
$17x - 2x^2 + 2x^2 = -42$
$17x = -42$

$$x = -\frac{42}{17}$$

Note que, de início, essa última equação aparentava ser de 2º grau por causa do termo $-\frac{x^2}{3}$ no seu lado direito. Entretanto, depois das simplificações, vimos que foi reduzida a uma equação de 1º grau ($17x = -42$ ou $17x + 42=0$).

Exercícios resolvidos

QUESTÃO 01

(PRF) Num determinado estado, quando um veículo é rebocado por estacionar em local proibido, o motorista paga uma taxa fixa de R$ 76,88 e mais R$ 1,25 por hora de permanência no estacionamento da polícia. Se o valor pago foi de R$ 101,88 o total de horas que o veículo ficou estacionado na polícia corresponde a:

A) 20
B) 21
C) 22
D) 23
E) 24

QUESTÃO 02

(PREF. IMARUÍ – AGENTE EDUCADOR – PREF. IMARUÍ/2014) Certa quantia em dinheiro foi dividida igualmente entre três pessoas, cada pessoa gastou a metade do dinheiro que ganhou e 1/3(um terço) do restante de cada uma foi colocado em um recipiente totalizando R$900,00(novecentos reais), qual foi a quantia dividida inicialmente?

A) R$900,00
B) R$1.800,00
C) R$2.700,00
D) R$5.400,00

QUESTÃO 03

(SABESP – APRENDIZ – FCC/2012) Um quadrado é chamado mágico quando suas casas são preenchidas por números cuja soma em cada uma das linhas, colunas ou diagonais é sempre a mesma.

O quadrado abaixo é mágico.

15	10	x – 2	6
4	x	16	9
3x – 1	11	2	7
$\frac{-x+7}{2}$	8	13	2x + 2

Um estudante determinou os valores desconhecidos corretamente e para 3x – 1 atribuiu

A)14
B) 12
C) 5
D) 3
E) 1

QUESTÃO 04

(PGE/BA – ASSISTENTE DE PROCURADORIA – FCC/2013) A prefeitura de um município brasileiro anunciou que 3/5 da verba destinada ao transporte público seriam aplicados na construção de novas linhas de metrô. O restante da verba seria igualmente distribuído entre quatro outras frentes: corredores de ônibus, melhoria das estações de trem, novos terminais de ônibus e subsídio a passagens. Se o site da prefeitura informa que serão gastos R$ 520 milhões com a melhoria das estações de trem, então o gasto com a construção de novas linhas de metrô, em reais, será de

A) 3,12 bilhões.
B) 2,86 bilhões.
C) 2,60 bilhões.
D) 2,34 bilhões.
E) 2,08 bilhões.

QUESTÃO 05

(CÂMARA DE SÃO PAULO/SP – TÉCNICO ADMINISTRATIVO – FCC/2014) Um funcionário de uma empresa deve executar uma tarefa em 4 semanas. Esse funcionário executou 3/8 da tarefa na 1ª semana. Na 2ª semana, ele executou 1/3 do que havia executado na 1ª semana. Na 3ª e 4ª semanas, o funcionário termina a execução da tarefa e verifica que na 3ª semana executou o dobro do que havia executado na 4ª semana. Sendo assim, a fração de toda a tarefa que esse funcionário executou na 4ª semana é igual a

A) 5/16.
B) 1/6.
C) 8/24.
D)1/ 4.
E) 2/5.

QUESTÃO 06

(CÂMARA DE SÃO PAULO/SP – TÉCNICO ADMINISTRATIVO – FCC/2014) Bia tem 10 anos a mais que Luana, que tem 7 anos a menos que Felícia. Qual é a diferença de idades entre Bia e Felícia?

A) 3 anos.
B) 7 anos.
C) 5 anos.
D) 10 anos.
E) 17 anos.

QUESTÃO 07

(DAE AMERICANAS/SP – ANALISTA ADMINSTRATIVO – SHDIAS/2013) Em uma praça, Graziela estava conversando com Rodrigo. Graziela perguntou a Rodrigo qual era sua idade, e ele respondeu da seguinte forma:

- 2/5 de minha idade adicionados de 3 anos correspondem à metade de minha idade.

Qual é a idade de Rodrigo?

A) Rodrigo tem 25 anos.
B) Rodrigo tem 30 anos.
C) Rodrigo tem 35 anos.
D) Rodrigo tem 40 anos.

QUESTÃO 08

(METRO/SP - AGENTE DE SEGURANÇA METROVIÁRIA I - FCC/2013) Dois amigos foram a uma pizzaria. O mais velho comeu $\frac{3}{8}$ da pizza que compraram. Ainda da mesma pizza o mais novo comeu $\frac{7}{5}$ da quantidade que seu amigo havia comido. Sendo assim, e sabendo que mais nada dessa pizza foi comido, a fração da pizza que restou foi

A) $\frac{3}{5}$

B) $\frac{7}{8}$

C) $\frac{1}{10}$

D) $\frac{3}{10}$

E) $\frac{36}{40}$

QUESTÃO 09

(METRO/SP - AGENTE DE SEGURANÇA METROVIÁRIA I - FCC/2013) Glauco foi à livraria e comprou 3 exemplares do livro J. Comprou 4 exemplares do livro K, com preço unitário de 15 reais a mais que o preço unitário do livro J. Comprou também um álbum de fotografias que custou a terça parte do preço unitário do livro K.

Glauco pagou com duas cédulas de 100 reais e recebeu o troco de 3 reais. Glauco pagou pelo álbum o valor, em reais, igual a

A) 33.
B) 132.
C) 54.
D) 44.
E) 11.

GRUPO NOVA

QUESTÃO 10

AGENTE DE SEGURANÇA METROVIÁRIA I - FCC/2013) Hoje, a soma das idades de três irmãos é 65 anos. Exatamente dez anos antes, a idade do mais velho era o dobro da idade do irmão do meio, que por sua vez tinha o dobro da idade do irmão mais novo. Daqui a dez anos, a idade do irmão mais velho será, em anos, igual a

A) 55.
B) 25.
C) 40.
D) 50.
E) 35.

Resoluções

1 - RESPOSTA "A".

Devemos inicialmente equacionar através de uma equação do 1° grau, ou seja:

y= 76,88 + 1,25. x ➔ 101,88 = 76,88 + 1,25x ➔ 101,88 – 76,88 = 1,25x

1,25x = 25 ➔ x = $\frac{25}{1,25}$ ➔ x = 20 horas.

Obs.: y é o valor pago pela multa x corresponde ao número de horas de permanência no estacionamento.

2 - RESPOSTA: "B".

Quantidade a ser dividida: x

Se 1/3 de cada um foi colocado em um recipiente e deu R$900,00, quer dizer que cada uma colocou R$300,00.

$$\frac{x}{3} = \frac{\frac{x}{3}}{2} + 300$$

$$\frac{x}{3} = \frac{x}{6} + 300$$

$$\frac{x}{3} - \frac{x}{6} = 300$$

$$\frac{2x-x}{6} = 300$$

$$\frac{x}{6} = 300$$

x = 1800

3 - RESPOSTA: "A".

Igualando a 1ª linha com a 3ª , temos:

$$15 + 10 + x - 2 + 6 = 3x - 1 + 11 + 2 + 7$$
$$2x = 10$$
$$x = 5$$

3x-1=14

4 - RESPOSTA: "A".

520 milhões para as melhorias das estações de trem, como foi distribuído igualmente, corredores de ônibus, novos terminais e subsídio de passagem também receberam cada um 520 milhões.

Restante da verba foi de 520.4 = 2080 ; 10^6 = notação científica de milhões (1.000.000).

Verba: y

$$\frac{3}{5}y + 2080.10^6 = y$$

$$\frac{3}{5}y - y = -2080.10^6$$

$$-2y = -10400.10^6$$

$$y = 5200.10^6$$

$\frac{3}{5}5200.10^6 = 3120.10^6 = 3,12.10^9$ ou 3,12 bilhões.

5 - RESPOSTA: "B".

Tarefa: x

Primeira semana: 3/8x

2 semana: $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}x = \frac{1}{8}x$

1ª e 2ª semana: $\frac{3}{8}x + \frac{1}{8}x = \frac{4}{8}x = \frac{1}{2}x$

Na 3ª e 4ª semana devem ser feito a outra metade, pois ele executou a metade na 1ª e 2ª semana como consta na fração acima (1/2x).

3ªsemana: 2y

4ª semana: y

$$2y + y = \frac{1}{2}x$$

$$3y = \frac{1}{2}x$$

$$y = \frac{1}{6}x$$

6 - RESPOSTA: "A".
Luana: x
Bia: x+10
Felícia: x+7
Bia-Felícia= x+10-x-7 = 3 anos.

7 - RESPOSTA: "B".
Idade de Rodrigo: x

$$\frac{2}{5}x + 3 = \frac{1}{2}x$$

$$\frac{2}{5}x - \frac{1}{2}x = -3$$

Mmc(2,5)=10

$$\frac{4x-5x}{10} = -3$$

$$4x - 5x = -30$$
$$x = 30$$

8 - RESPOSTA: "C".

$$pizza: x \therefore \quad y: o\ que\ restou\ da\ pizza$$

$$mais\ velho: \frac{3}{8}x$$

$$mais\ novo: \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{8}x = \frac{21}{40}x$$

$$\frac{3}{8}x + \frac{21}{40}x + y = x$$

$$y = x - \frac{3}{8}x - \frac{21}{40}x$$

$$y = \frac{40x-15x-21x}{40} = \frac{4x}{40} = \frac{1}{10}x$$

Sobrou 1/10 da pizza

9 - RESPOSTA: "E".

Preço livro J: x
Preço do livro K: x+15

$$álbum: \frac{x+15}{3}$$

Valor pago:197 reais (2.100 – 3)

$$3x + 4(x + 15) + \frac{x+15}{3} = 197$$

$$\frac{9x+12(x+15)+x+15}{3} = 197$$

$$9x + 12x + 180 + x + 15 = 591$$
$$22x = 396$$
$$x = 18$$

$$álbum: \frac{x+15}{3} = \frac{18+15}{3} = 11$$

O valor pago pelo álbum é de R$ 11,00.

10 - RESPOSTA: "C".
Irmão mais novo: x
Irmão do meio: 2x
Irmão mais velho:4x

Hoje:
Irmão mais novo: x+10
Irmão do meio: 2x+10
Irmão mais velho:4x+10

x+10+2x+10+4x+10=65
7x=65-30
7x=35
x=5

hoje:
Irmão mais novo: x+10=5+10=15
Irmão do meio: 2x+10=10+10=20
Irmão mais velho:4x+10=20+10=30

Daqui a dez anos
Irmão mais novo: 15+10=25
Irmão do meio: 20+10=30
Irmão mais velho: 30+10=40

O irmão mais velho terá 40 anos.

EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Denomina-se equação do 2º grau na incógnita x toda equação da forma :

$ax^2 + bx + c = 0$, em que *a, b, c* são números reais e $a \neq 0$.

Nas equações de 2º grau com uma incógnita, os números reais expressos por *a, b, c* são chamados **coeficientes** da equação:

- ***a*** é sempre o coeficiente do termo em $\mathbf{x^2}$.
- ***b*** é sempre o coeficiente do termo em **x**.
- ***c*** é sempre o coeficiente ou termo **independente**.

Equação completa e incompleta:

- Quando $b \neq 0$ e $c \neq 0$, a equação do 2º grau se diz **completa**.

Exemplos

$5x^2 - 8x + 3 = 0$ é uma equação completa ($a = 5$, $b = -8$, $c = 3$).

$y^2 + 12y + 20 = 0$ é uma equação completa ($a = 1$, $b = 12$, $c = 20$).

- Quando $b = 0$ ou $c = 0$ ou $b = c = 0$, a equação do 2º grau se diz **incompleta**.

Exemplos

$x^2 - 81 = 0$ é uma equação incompleta ($a = 1$, $b = 0$ e $c = -81$).

$10t^2 + 2t = 0$ é uma equação incompleta ($a = 10$, $b = 2$ e $c = 0$).

$5y^2 = 0$ é uma equação incompleta ($a = 5$, $b = 0$ e $c = 0$).

Todas essas equações estão escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$, que é denominada forma normal ou forma reduzidade uma equação do 2º grau com uma incógnita.

Há, porém, algumas equações do 2º grau que não estão escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$; por meio de transformações convenientes, em que aplicamos o princípio aditivo e o multiplicativo, podemos reduzi-las a essa forma.

Exemplo: Pelo princípio aditivo.

$2x^2 - 7x + 4 = 1 - x^2$

$2x^2 - 7x + 4 - 1 + x^2 = 0$

$2x^2 + x^2 - 7x + 4 - 1 = 0$

$3x^2 - 7x + 3 = 0$

Exemplo: Pelo princípio multiplicativo.

$$\frac{2}{x} - \frac{1}{2} = \frac{x}{x-4}$$

$$\frac{4.(x-4) - x(x-4)}{2x(x-4)} = \frac{2x^2}{2x(x-4)}$$

$4(x - 4) - x(x - 4) = 2x^2$

$4x - 16 - x^2 + 4x = 2x^2$

$-x^2 + 8x - 16 = 2x^2$

$-x^2 - 2x^2 + 8x - 16 = 0$

$-3x^2 + 8x - 16 = 0$

Resolução das equações incompletas do 2º grau com uma incógnita.

- A equação é da forma $ax^2 + bx = 0$.

$x^2 + 9 = 0 \rightarrow$ colocamos x em evidência

$x \,.\, (x - 9) = 0$

$x = 0$ ou $x - 9 = 0$

$x = 9$

Logo, $S = \{0, 9\}$ e os números 0 e 9 são as raízes da equação.

- A equação é da forma $ax^2 + c = 0$.

$x^2 - 16 = 0 \rightarrow$ Fatoramos o primeiro membro, que é uma diferença de dois quadrados.

$(x + 4) \,.\, (x - 4) = 0$

$x + 4 = 0$ $\quad$ $x - 4 = 0$

$x = -4$ $\quad$ $x = 4$

ou

$x^2 - 16 = 0 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = 4.$

Logo, $S = \{-4, 4\}$.

FÓRMULA DE BHÁSKARA

Usando o processo de Bháskara e partindo da equação escrita na sua forma normal, foi possível chegar a uma fórmula que vai nos permitir determinar o conjunto solução de qualquer equação do 2º grau de maneira mais simples.

Essa fórmula é chamada **fórmula resolutiva** ou **fórmula de Bháskara.**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

Nesta fórmula, o fato de x ser ou não número real vai depender do discriminante △; temos então, três casos a estudar.

1º caso: △ é um número real positivo (△> 0).
Neste caso, $\sqrt{\Delta}$ é um número real, e existem dois valores reais diferentes para a incógnita x, sendo costume representar esses valores por x' e x'', que constituem as raízes da equação.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \quad x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

2º caso: △ é zero (△ = 0).
Neste caso, $\sqrt{\Delta}$ é igual a zero e ocorre:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2.a} = \frac{-b \pm 0}{2.a} = \frac{-b}{2a}$$

Observamos, então, a existência de um único valor real para a incógnita x, embora seja costume dizer que a equação tem duas raízes reais e iguais, ou seja:

$$x' = x'' = \frac{-b}{2a}$$

3º caso: △ é um número real negativo (△< 0).
Neste caso, $\sqrt{\Delta}$ não é um número real, pois não há no conjunto dos números reais a raiz quadrada de um número negativo.
Dizemos então, que não há valores reais para a incógnita x, ou seja, a equação não tem raízes reais.
A existência ou não de raízes reais e o fato de elas serem duas ou uma única dependem, exclusivamente, do discriminante △ = $b^2 - 4.a.c$; daí o nome que se dá a essa expressão.

Na equação $ax^2 + bx + c = 0$
- △ = $b^2 - 4.a.c$
- Quando △ ≥ 0, a equação tem raízes reais.
- Quando △<0, a equação não tem raízes reais.
- △> 0 (duas raízes diferentes).
- △ = 0 (uma única raiz).

Exemplo: Resolver a equação $x^2 + 2x - 8 = 0$ no conjunto R.
temos: a = 1, b = 2 e c = – 8
△ = $b^2 - 4.a.c = (2)^2 - 4 . (1) . (-8) = 4 + 32 = 36 > 0$

Como △>0, a equação tem duas raízes reais diferentes, dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-(2) \pm \sqrt{36}}{2.(1)} = \frac{-2 \pm 6}{2}$$

$$x' = \frac{-2+6}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad x'' = \frac{-2-6}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Então: S = {-4, 2}.

Propriedade das raízes

Dada a equação $ax^2 + bx + c=0$, com a , e S e P a soma e o produto respectivamente dessas raízes.

$$S = x1 + x2 = -\frac{b}{a}$$

$$P = x1 . x2 = \frac{c}{a}$$

Logo podemos reescrever a equação da seguinte forma: $x^2 - Sx + P=0$

Exercícios resolvidos

QUESTÃO 01

(PREF. JUNDIAI/SP – ELETRICISTA – MAKIYAMA/2013)Para que a equação $(3m-9)x^2-7x+6=0$ seja uma equação de segundo grau, o valor de m deverá, necessariamente, ser diferente de:

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 0.
E) 9.

QUESTÃO 02

(CÂMARA DE CANITAR/SP – RECEPCIONISTA – INDEC/2013) Qual a equação do 2º grau cujas raízes são 1 e 3/2?

A) $x^2-3x+4=0$
B) $-3x^2-5x+1=0$
C) $3x^2+5x+2=0$
D) $2x^2-5x+3=0$

QUESTÃO 03

(CÂMARA DE CANITAR/SP – RECEPCIONISTA – INDEC/2013) O dobro da menor raiz da equação de 2º grau dada por $x^2-6x=-8$ é:

A) 2
B) 4
C) 8
D) 12

QUESTÃO 04

(CGU – ADMINISTRATIVA – ESAF/2012) Um segmento de reta de tamanho unitário é dividido em duas partes com comprimentos x e 1-x respectivamente.

Calcule o valor mais próximo de x de maneira que x = (1-x) / x, usando √5=2,24.

A) 0,62
B) 0,38
C) 1,62
C) 0,5
D) 1/

QUESTÃO 05

Antônio gastou R$ 240,00 na compra de brindes iguais para distribuir no final de ano. Com um desconto de R$ 2,00 em cada brinde, teria comprado 10 brindes a mais com os mesmos R$ 240,00. A equação cuja solução levará ao valor do brinde sem o desconto é dada por:

A) $b^2 - 2b + 48 = 0$
B) $b^2 + 10b - 1200 = 0$
C) $b^2 - 2b - 48 = 0$
D) $b^2 - 10b + 1200 = 0$
E) $b^2 + 2b - 240 = 0$

QUESTÃO 06

(PREF. PAULISTANA/PI – PROFESSOR DE MATEMÁTICA – IMA/2014) Temos que a raiz do polinômio $p(x) = x^2 – mx + 6$ é igual a 6. O valor de m é:

A) 15
B) 7
C) 10
D) 8
E) 5

QUESTÃO 07

(TEC. JUD. – 2ª FCC) Em certo momento, o número x de soldados em um policiamento ostensivo era tal que subtraindo-se do seu quadrado o seu quadruplo, obtinha-se 1845. O valor de x é:

A) 42.
B) 45.
C) 48.
D) 50.
E) 52.

QUESTÃO 08

(CPTM - Médico do trabalho – Makiyama) A metrologia anunciou que o dia de amanhã será frio, com algumas pancadas de chuva. A temperatura mínima prevista é A e a temperatura máxima é B. Sabendo que A e B são as raízes da equação $x^2 - 26x + 160 = 0$, podemos afirmar que A e B são respectivamente, em graus Celsius.

(A) 10° e 16°.
(B) 12° e 16°.
(C) 10° e 18°.
(D) 15° e 17°.
(E) 12° e 18°.

QUESTÃO 09

(Prefeitura de São Paulo - SP - Guarda Civil Metropolitano - MS CONCURSOS) Se $x_1 > x_2$ são as raízes da equação $x^2 - 27x + 182 = 0$, então o valor de $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}$ é:

A) $\frac{1}{27}$.

B) $\frac{1}{13}$.

C) 1.

D) $\frac{1}{182}$.

E) $\frac{1}{14}$.

QUESTÃO 10

(Pref. Mogeiro/PB - Professor – Matemática – EXAMES) A soma das raízes da equação $(k - 2)x^2 - 3kx + 1 = 0$, com $k \neq 2$, é igual ao produto dessas raízes. Nessas condições. Temos:

A) k = 1/2.
B) k = 3/2.
C) k = 1/3.
D) k = 2/3.
E) k = -2.

Resoluções

1 - RESPOSTA: "C".

Neste caso o valor de a $\neq 0, logo$:
3m-9≠0
3m≠9
m≠3

2 - RESPOSTA: "D".

Como as raízes foram dadas, para saber qual a equação:

$x^2 - Sx + P = 0$, usando o método da soma e produto; S= duas raízes somadas resultam no valor numérico de *b*; e P= duas raízes multiplicadas resultam no valor de c.

$$S = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} = b$$

$$P = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} = c\,; substituindo$$

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

3 - RESPOSTA: "B".

x^2-6x+8=0

$\Delta = (-6)^2 - 4.1.8 \Rightarrow 36 - 32 = 4$

$x = \frac{-(-6)\pm\sqrt{4}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{6\pm2}{2}$

$x_1 = \frac{6+2}{2} = 4$

$x_2 = \frac{6-2}{2} = 2$

4 - RESPOSTA: "A".

$x = \frac{1-x}{x}$

$x^2 = 1-x$

$x^2 + x - 1 = 0$

$\Delta = (1)^2 - 4.1.(-1) \Rightarrow \Delta = 1 + 4 = 5$

$x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$x_1 = \frac{(-1+2{,}24)}{2} = 0{,}62$

$x_2 = \frac{-1-2{,}24}{2} = -1{,}62\ (não\ convém)$

5 - RESPOSTA "C".

Dados:

$x \rightarrow$ preço de cada brinde

$b \rightarrow$ total de brindes

De acordo com o enunciado temos: $x.b = 240 \Rightarrow x = \frac{240}{b}(i)$

$(b+10).(x-2) = 240(ii)$

Substituindo (i) em (ii) teremos:

$(b+10).(\frac{240}{b}-2) = 240 \Rightarrow (b+10).\left(\frac{240-2b}{b}\right) = 240 \Rightarrow$

$240b - 2b^2 + 2400 - 20b = 240b \Rightarrow b^2 + 10b - 1200 = 0$

6 – RESPOSTA: "B".

Lembrando que a fórmula pode ser escrita como :x^2-Sx+P, temos que P(produto)=6 e se uma das raízes é 6, a outra é 1.

Então a soma é 6+1=7

S=m=7

7 – RESPOSTA "B"

Montando a expressão

$x^2 - 4x = 1845$; igualando a expressão a zero teremos: $x^2 - 4x - 1845 = 0$

Aplicando a formula de Bháskara:

GRUPO NOVA

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4.1.(-1845)}}{2.1} = \frac{4\pm\sqrt{16+7380}}{2} = \frac{4\pm\sqrt{7396}}{2}$$

$$\frac{4\pm86}{2} \Rightarrow x1 = \frac{4+86}{2} = 45 \quad \therefore \quad x2 = \frac{4-86}{2} = -41(não\ convém\ usar)$$

Logo o valor de x = 45

8 - RESPOSTA: "A".
Resolvendo a equação pela fórmula de Bháskara:

$x^2 - 26x + 160 = 0$; a = 1, b = - 26 e c = 160

$\Delta = b^2 - 4.a.c$
$\Delta = (-26)^2 - 4.1.160$
$\Delta = 676 - 640$
$\Delta = 36$

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-26)\pm\sqrt{36}}{2.1}$$

$$x = \frac{26\pm6}{2} \rightarrow x = \frac{26+6}{2} = \frac{32}{2} = 16 \text{ ou } x = \frac{26-6}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

9 - RESPOSTA: "D".
Primeiro temos que resolver a equação:

a = 1, b = - 27 e c = 182

$\Delta = b^2 - 4.a.c$
$\Delta = (-27)^2 - 4.1.182$
$\Delta = 729 - 728$
$\Delta = 1$

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-27)\pm\sqrt{1}}{2.1} = \frac{27\pm1}{2} \rightarrow x_1 = 14 \text{ ou } x_2 = 13$$

O mmc entre x_1 e x_2 é o produto $x_1.x_2$

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 - x_2}{x_1.x_2} = \frac{14-13}{14.13} = \frac{1}{182}$$

10 - RESPOSTA: "C".
Vamos usar as fórmulas da soma e do produto:

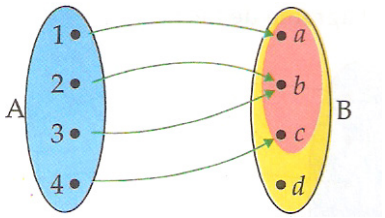
$S = \frac{-b}{a}$ e $P = \frac{c}{a}$.

$(k-2)x^2 - 3kx + 1 = 0$; a = k – 2, b = - 3k e c = 1
S = P

$$\frac{-b}{\cancel{a}} = \frac{c}{\cancel{a}} \rightarrow -b = c \rightarrow -(-3k) = 1 \rightarrow 3k = 1 \rightarrow k = 1/3$$

FUNÇÃO DO 1° GRAU

Dados dois conjuntos *A* e *B*, não-vazios, função é uma relação binária de *A* em *B* de tal maneira que todo elemento *x*, pertencente ao conjunto *A*, tem para si um <u>único</u> correspondente *y*, pertencente ao conjunto *B*, que é chamado de imagem de *x*.



Notemos que, para uma relação binária dos conjuntos *A* e *B*, nesta ordem, representarem uma função é preciso que:

- Todo elemento do conjunto *A* tenha algum correspondente (imagem) no conjunto *B*;
- Para cada elemento do conjunto *A* exista um único correspondente (imagem) no conjunto *B*.

Assim como em relação, usamos para as funções, que são relações especiais, a seguinte linguagem:

Domínio: Conjunto dos elementos que possuem imagem. Portanto, todo o conjunto *A*, ou seja, D = *A*.

Contradomínio: Conjunto dos elementos que se colocam à disposição para serem ou não imagem dos elementos de *A*. Portanto, todo conjunto *B*, ou seja, CD = *B*.

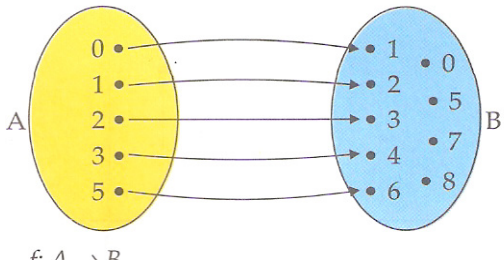
Conjunto Imagem: Subconjunto do conjunto *B* formado por todos os elementos que são imagens dos elementos do conjunto *A*, ou seja, no exemplo anterior: Im = {a, b, c}.

Exemplo

Consideremos os conjuntos A = {0, 1, 2, 3, 5} e B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}.

Vamos definir a função *f* de A em B com *f*(x) = x + 1.

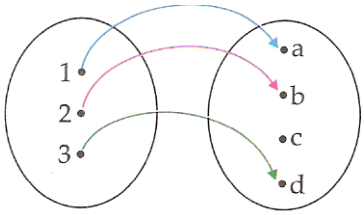
Tomamos um elemento do conjunto A, representado por x, substituímos este elemento na sentença *f*(x), efetuamos as operações indicadas e o resultado será a imagem do elemento x, representada por *y*.



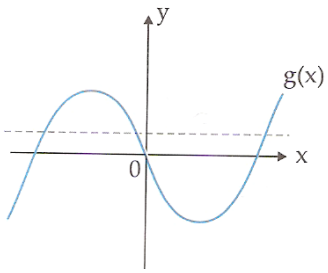
$f: A \rightarrow B$
$y = f(x) = x + 1$

Tipos de Função

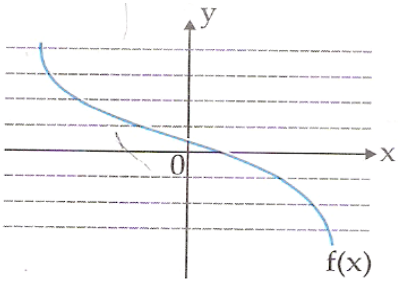
Injetora: Quando para ela elementos distintos do domínio apresentam imagens também distintas no contradomínio.



Reconhecemos, graficamente, uma função injetora quando, uma reta horizontal, qualquer que seja interceptar o gráfico da função, uma única vez.

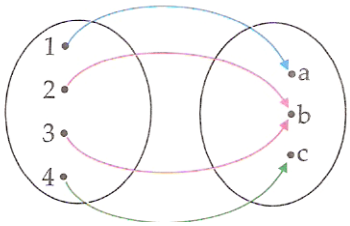


f(x) é injetora

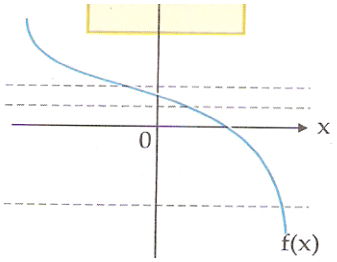


g(x) não é injetora
(interceptou o gráfico mais de uma vez)

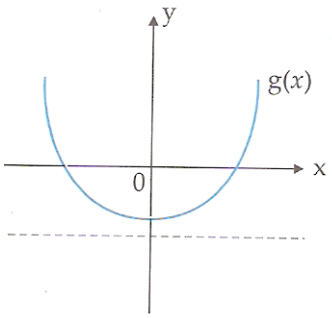
Sobrejetora: Quando todos os elementos do contradomínio forem imagens de pelo menos um elemento do domínio.



Reconhecemos, graficamente, uma função sobrejetora quando, qualquer que seja a reta horizontal que interceptar o eixo no contradomínio, interceptar, também, pelo menos uma vez o gráfico da função.

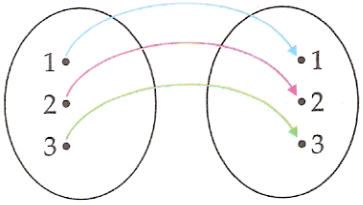


f(x) é sobrejetora

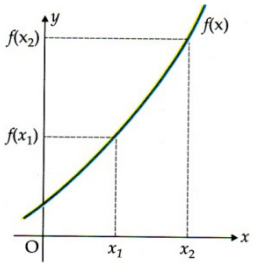


g(x) não é sobrejetora
(não interceptou o gráfico)

Bijetora: Quando apresentar as características de função injetora e ao mesmo tempo, de sobrejetora, ou seja, elementos distintos têm sempre imagens distintas e todos os elementos do contradomínio são imagens de pelo menos um elemento do domínio.

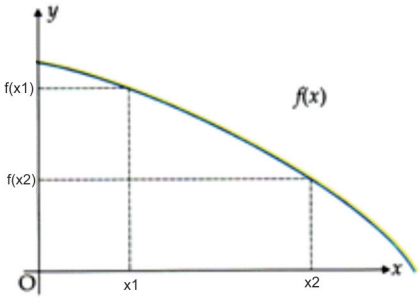


Função crescente: A função $f(x)$, num determinado intervalo, é crescente se, para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a este intervalo, com $x_1<x_2$, tivermos $f(x_1)<f(x_2)$.



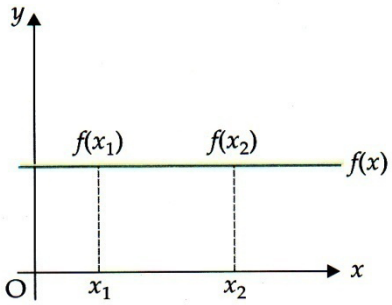
$x_1<x_2 \rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Função decrescente: Função $f(x)$, num determinado intervalo, é decrescente se, para quaisquer x_1 e $x_2$pertencente a este intervalo, com $x_1<x_2$, tivermos $f(x_1)>f(x_2)$.



$x_1<x_2 \rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

Função constante: A função $f(x)$, num determinado intervalo, é constante se, para quaisquer $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) = f(x_2)$.



Gráficos de uma Função

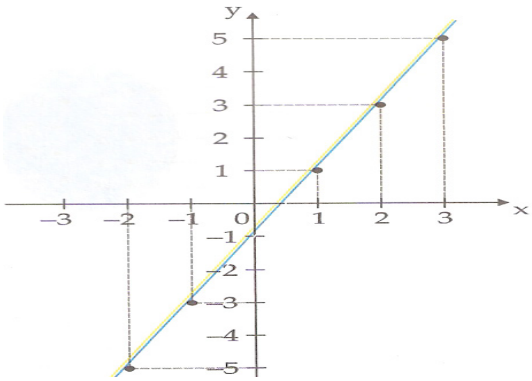
A apresentação de uma função por meio de seu gráfico é muito importante, não só na Matemática como nos diversos ramos dos estudos científicos.

Exemplo

Consideremos a função real $f(x) = 2x - 1$. Vamos construir uma tabela fornecendo valores para x e, por meio da sentença $f(x)$, obteremos as imagens y correspondentes.

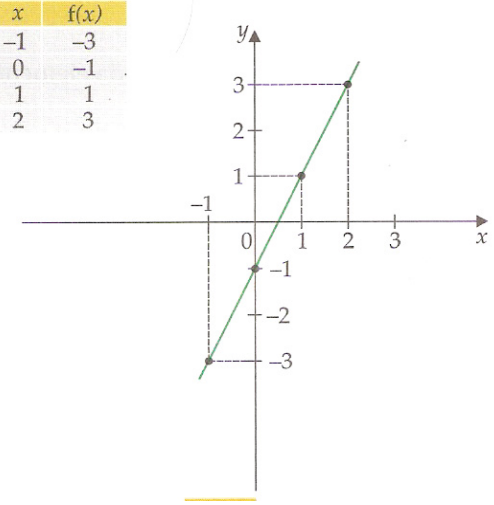
x	y = 2x – 1
–2	–5
–1	–3
0	–1
1	1
2	3
3	5

Transportados os pares ordenados para o plano cartesiano, vamos obter o gráfico correspondente à função $f(x)$.



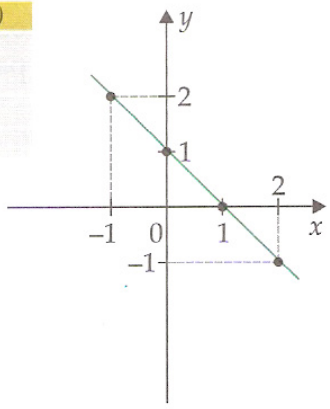
Exemplo para $a > 0$
Consideremos $f(x) = 2x - 1$.

x	f(x)
–1	–3
0	–1
1	1
2	3

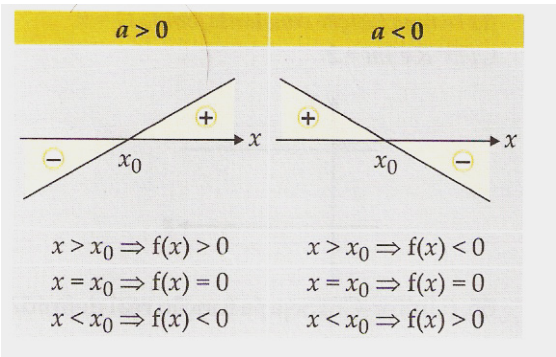


Exemplo para $a < 0$
Consideremos $f(x) = -x + 1$.

x	f(x)
–1	2
0	1
1	0
2	–1



Consideremos a função $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$, em que x_0 é a raiz da função $f(x)$.



Conclusão: O gráfico de uma função do 1º grau é uma reta crescente para $a > 0$ e uma reta decrescente para $a < 0$.

Zeros da Função do 1º grau:

Chama-se zero ou raiz da função do 1º grau $y = ax + b$ o valor de x que anula a função, isto é, o valor de x para que y seja igual à zero.

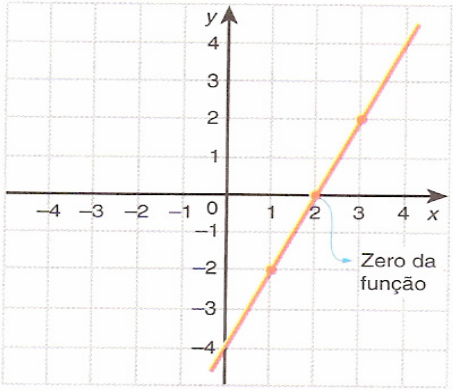
Assim, para achar o zero da função $y = ax + b$, basta resolver a equação $ax + b = 0$.

Exemplo
Determinar o zero da função:
$y = 2x - 4$.
$2x - 4 = 0$
$2x = 4$
$x = \frac{4}{2}$

$x = 2$

O zero da função $y = 2x - 4$ é 2.

No plano cartesiano, o zero da função do 1º grau é representado pela abscissa do ponto onde a reta corta o eixo x.



x	y	(x,y)
1	–2	(1, –2)
3	2	(3,2)

Observe que a reta y = 2x – 4 intercepta o eixo x no ponto (2,0), ou seja, no ponto de abscissa 2, que é o zero da função.

Conhecido o zero de uma função do 1º grau e lembrando a inclinação que a reta pode ter, podemos esboçar o gráfico da função.

Estudo do sinal da função do 1º grau:

Estudar o sinal da função do 1º grau $y = ax + b$ é determinar os valores reais de x para que:

- A função se anule (y = 0);
- A função seja positiva (y > 0);
- A função seja negativa (y < 0).

Exemplo

Estudar o sinal da função y = 2x – 4 (a = 2 > 0).

a) Qual o valor de x que anula a função?

y = 0
2x – 4 = 0
2x = 4

$$x = \frac{4}{2}$$

x = 2

A função se anula para x = 2.

b) Quais valores de x tornam positiva a função?

y > 0
2x – 4 > 0
2x > 4

$$x > \frac{4}{2}$$

x > 2

A função é positiva para todo x real maior que 2.

c) Quais valores de x tornam negativa a função?

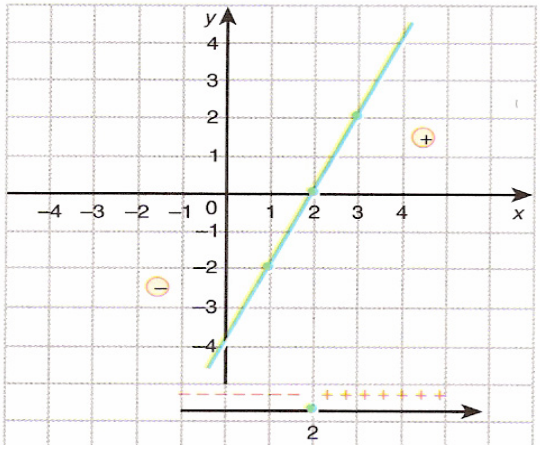
y < 0
2x – 4 < 0
2x < 4

$$x < \frac{4}{2}$$

x < 2

A função é negativa para todo x real menor que 2.

Podemos também estudar o sinal da função por meio de seu gráfico:



- Para x = 2 temos y = 0;
- Para x > 2 temos y > 0;
- Para x < 2 temos y < 0.

Relação Binária

Par Ordenado

Quando representamos o conjunto (*a, b*) ou (*b, a*) estamos, na verdade, representando o mesmo conjunto. Porém, em alguns casos, é conveniente distinguir a ordem dos elementos.

Para isso, usamos a idéia de par ordenado. A princípio, trataremos o par ordenado como um conceito primitivo e vamos utilizar um exemplo para melhor entendê-lo. Consideremos um campeonato de futebol e que desejamos apresentar, de cada equipe, o total de pontos ganhos e o saldo de gols. Assim, para uma equipe com 12 pontos ganhos e saldo de gols igual a 18, podemos fazer a indicação (12, 18), já tendo combinado, previamente, que o primeiro número se refere ao número de pontos ganhos, e o segundo número, ao saldo de gols.

Portanto, quando tivermos para outra equipe a informação de que a sua situação é (2, -8) entenderemos, que esta equipe apresenta 2 pontos ganhos e saldo de gols -8. Note que é importante a ordem em que se apresenta este par de números, pois a situação (3, 5) é totalmente diferente da situação (5,3). Fica, assim, estabelecida a idéia de par ordenado: um par de valores cuja ordem de apresentação é importante.

Observações:(*a, b*) = (*c, d*) se, e somente se, *a* = *c* e *b* = *d*

(*a, b*) = (*b, a*) se, o somente se, *a* = *b*

Produto Cartesiano

Dados dois conjuntos *A* e *B*, chamamos de produto cartesiano *A* x *B* ao conjunto de todos os possíveis pares ordenados, de tal maneira que o 1º elemento pertença ao 1º conjunto (*A*) e o 2º elemento pertença ao 2º conjunto (*B*).

$$A \times B = \{(x, y) / x \in A \; e \; y \in B\}$$

Quando o produto cartesiano for efetuado entre o conjunto *A* e o conjunto *A*, podemos representar *A* x *A* = A^2. Vejamos, por meio de o exemplo a seguir, as formas de apresentação do produto cartesiano.

Exemplo

Sejam *A* = {1, 4, 9} e *B* = {2, 3}. Podemos efetuar o produto cartesiano *A* x *B*, também chamado *A* cartesiano *B*, e apresentá-lo de várias formas.

a) Listagem dos elementos

Apresentamos o produto cartesiano por meio da listagem, quando escrevemos todos os pares ordenados que constituam o conjunto. Assim, no exemplo dado, teremos:

A e *B* = {(1, 2),(1, 3),(4, 2),(4, 3),(9, 2),(9, 3)}

Vamos aproveitar os mesmo conjuntos *A* e *B* e efetuar o produto *B* e *A* (*B* cartesiano *A*): *B* x *A* = {(2, 1),(2, 4),(2, 9),(3, 1),(3, 4),(3, 9)}.

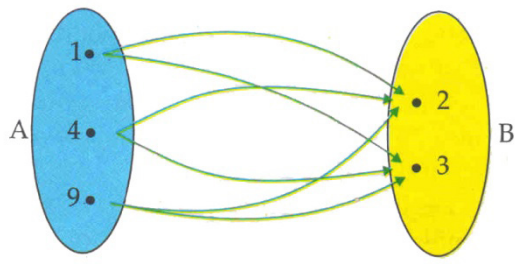
Observando *A* x *B* e *B* x *A*, podemos notar que o produto cartesiano não tem o privilégio da propriedade comutativa, ou seja, *A* x *B* é diferente de *B* x *A*. Só teremos a igualdade *A* x *B* = *B* x *A* *quando* *A* e *B* forem conjuntos iguais.

Observação:Considerando que para cada elemento do conju nto *A* o número de pares ordenados obtidos é igual ao número de elementos do conjunto *B*, teremos: *n(A* x *B)* = *n(A)* x *n(B)*.

b) Diagrama de flechas

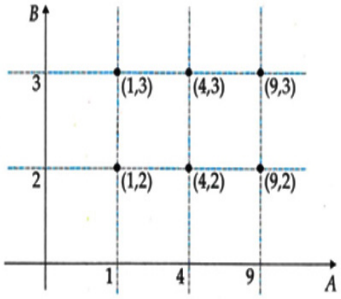
Apresentamos o produto cartesiano por meio do diagrama de flechas, quando representamos cada um dos conjuntos no diagrama de Euler-Venn, e os pares ordenados por "flechas" que partem do 1º elemento do par ordenado (no 1º conjunto) e chegam ao 2º elemento do par ordenado (no 2º conjunto).

Considerando os conjuntos *A* e *B* do nosso exemplo, o produto cartesiano *A* x *B* fica assim representado no diagrama de flechas:



c) Plano cartesiano

Apresentamos o produto cartesiano, no plano cartesiano, quando representamos o 1º conjunto num eixo horizontal, e o 2º conjunto num eixo vertical de mesma origem e, por meio de pontos, marcamos os elementos desses conjuntos. Em cada um dos pontos que representam os elementos passamos retas (horizontais ou verticais). Nos cruzamentos dessas retas, teremos pontos que estarão representando, no plano cartesiano, cada um dos pares ordenados do conjunto *A* cartesiano *B* (*B* x *A*).



Domínio de uma Função Real

Para uma função de *R* em *R*, ou seja, com elementos no conjunto dos números reais e imagens também no conjunto dos números reais, será necessária, apenas, a apresentação da sentença que faz a "ligação" entre o elemento e a sua imagem.

Porém, para algumas sentenças, alguns valores reais não apresentam imagem real.

Por exemplo, na função $f(x) = \sqrt{(x-1)}$, o número real 0 não apresenta imagem real e, portanto, *f(x)* características de função, precisamos limitar o conjunto de partida, eliminando do conjunto dos números reais os elementos que, para essa sentença, não apresentam imagem. Nesse caso, bastaria estabelecermos como domínio da função *f(x)* o conjunto $D = \{x \in R / x \geq 1\}$.

Para determinarmos o domínio de uma função, portanto, basta garantirmos que as operações indicadas na sentença são possíveis de serem executadas. Dessa forma, apenas algumas situações nos causam preocupação e elas serão estudadas a seguir.

1ª) $y = \sqrt[2n]{f(x)}$ $\qquad f(x) \geq (n \in N^*)$

2ª) $y = \dfrac{1}{f(x)} \Rightarrow f(x) \neq 0$

Vejamos alguns exemplos de determinação de domínio de uma função real.

Exemplos

Determine o domínio das seguintes funções reais.

A) $f(x) = 3x^2 + 7x - 8$
$D = R$

B) $f(x) = \sqrt{x+7}$
$x - 7 \geq 0 \rightarrow x \geq 7$
$D = \{x \in R / x \geq 7\}$

C) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$
$D = R$

Observação: Devemos notar que, para raiz de índice impar, o radicando pode assumir qualquer valor real, inclusive o valor negativo.

D) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x+8}}$

$x + 8 > 0 \rightarrow x > -8$

$D = \{x \in R / x > -8\}$

E) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+5}}{x-8}$

$x - 5 \geq 0 \rightarrow x \geq 5$

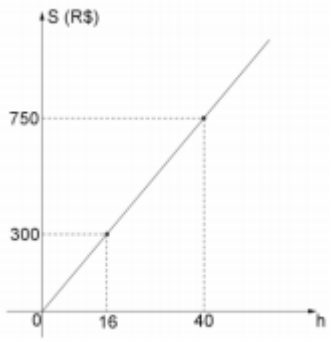
$x - 8 \geq 0 \rightarrow x \neq 8$

$D = \{x \in R / x \geq 5 \text{ e } x \neq 8\}$

Exercícios resolvidos

QUESTÃO 01

(PM/SP – CABO – CETRO/2012) O gráfico abaixo representa o salário bruto (S) de um policial militar em função das horas (h) trabalhadas em certa cidade. Portanto, o valor que este policial receberá por 186 horas é



A) R$3.487,50.
B) R$3.506,25.
C) R$3.534,00.
D) R$3.553,00.

QUESTÃO 02

(PREF. JUNDIAI/SP – ELETRICISTA – MAKIYAMA/2013) Em determinado estacionamento cobra-se R$ 3,00 por hora que o veículo permanece estacionado. Além disso, uma taxa fixa de R$ 2,50 é somada à tarifa final. Seja t o número de horas que um veículo permanece estacionado e T a tarifa final, assinale a seguir a equação que descreve, em reais, o valor de T:

A) T=3t
B) T=3t + 2,50
C) T=3t + 2.50t
D) T=3t + 7,50
E) T=7,50t + 3

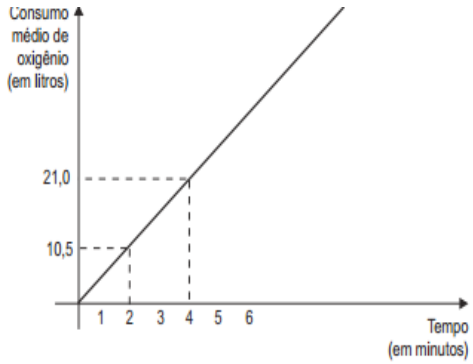
QUESTÃO 03

(PM/SP – SARGENTO CFS – CETRO/2012) Dada a função f(x) = −4x +15 , sabendo que f(x) = 35, então

A) x = 5.
B) x = 6.
C) x = -6.
D) x = -5.

QUESTÃO 04

(BNDES – TÉCNICO ADMINISTRATIVO – CESGRANRIO/2013)O gráfico abaixo apresenta o consumo médio de oxigênio, em função do tempo, de um atleta de 70 kg ao praticar natação.



Considere que o consumo médio de oxigênio seja diretamente proporcional à massa do atleta.

Qual será, em litros, o consumo médio de oxigênio de um atleta de 80 kg, durante 10 minutos de prática de natação?

A) 50,0
B) 52,5
C) 55,0
D) 57,5
E) 60,0

QUESTÃO 05

(PETROBRAS – TÉCNICO AMBIENTAL JÚNIOR – CESGRANRIO/2012)

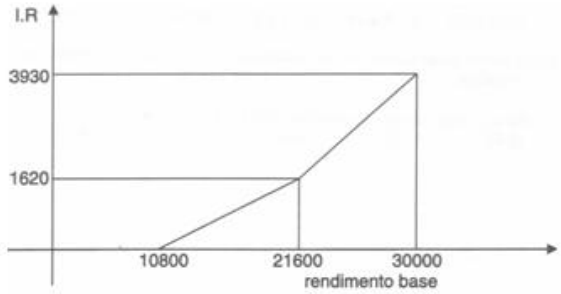
$$\text{Se } f(x) = \begin{cases} 2x - p, & \text{se } x \le 1 \\ mx - 1, & \text{se } 1 < x < 6 \\ \dfrac{7x+4}{2}, & \text{se } x \ge 6 \end{cases} \text{ é uma função contínua,}$$

De domínio real, então, m − p é igual a

A) 3
B) 4
C) 5
D) 64
E) 7

QUESTÃO 06

(TRT – Técnico Judiciário) O imposto de renda (IR) a ser pago, em função do rendimento-base, durante o ano de 2000, está representado pelo gráfico abaixo:



Considere, com base no gráfico, as proposições abaixo:

I) A pessoa com rendimento-base menor que R$ 10800,00 está isenta de IR;

II) Sendo x o rendimento base e o y o imposto e se 10800 x < 21600 então y = 0,15x – 1620, considerando x e y em reais.

III) O imposto a pagar é sempre o produto do rendimento-base por uma constante.

Quais são verdadeiras, levando-se em conta somente as informações do gráfico e as afirmações subsequentes?

A) apenas I
B) apenas II
C) apenas III
D) apenas I e II
E) apenas I e III

QUESTÃO 07

(BRDE-RS) – Numa firma, o custo para produzir x unidades de um produto é $C(x) = \frac{x}{2} + 10000$, e o faturamento obtido com a comercialização dessas x unidades é $f(x) = \frac{2}{3}x$. Para que a firma não tenha prejuízo, o faturamento mínimo com a comercialização do produto deverá ser de:

A) R$ 10.000,00
B) R$ 13.000,00
C) R$ 15.000,00
D) R$ 18.000,00
E) R$ 20.000,00

QUESTÃO 08

A função f de R em R é tal que, para todo x ∈ R, f(5x) = 5f(x). Se f(25) = 75, então f(1) é igual a:

A) 15
B) 10
C) 5
D) 3
E) 1

QUESTÃO 09

Sabendo que a função $f:\Re \rightarrow \Re$ **é tal que para qualquer x e y pertencentes ao seu domínio f(x+y)=-f(x)+f(y) e f(3) = 1, podemos afirmar que:**

A) f(4) = 3+ f(1)

B) f(4) = f(3) +1

C) f(4) = f(3) . (1)

D) f(4) = 3 . f(1)

E) f(4) = 1 + $\frac{1}{3}$

QUESTÃO 10

(PM/AM - Soldado da Polícia Militar – ISAE/2011)

Se f(x) = 3 – 2x, x real, então f(–5) é igual a:

A) – 7;
B) – 2;
C) 7;
D) 13.

Resoluções

1 - RESPOSTA: "A".

$$\frac{300}{16} = \frac{750}{40} = \frac{x}{186}$$

$$40x = 750 \cdot 186$$
$$x = 3487{,}50$$

2 - RESPOSTA: "B".

Equacionando as informações temos: 3 deve ser multiplicado por t, pois depende da quantidade de tempo, e acrescentado 2,50 fixo

T=3t+2,50

3 - RESPOSTA: "D".

35=-4x+15
-4x=20
x=-5

4 - RESPOSTA: "E".

A proporção de oxigênio/tempo:

$$\frac{10{,}5}{2} = \frac{21{,}0}{4} = \frac{x}{10}$$

4x=210

X=52,5 litros de oxigênio em 10 minutos para uma pessoa de 70 kg

52,5litros----70kg
x----------80kg
x=60 litros

5 - RESPOSTA: "C".

Aplicando segundo as condições mencionadas:
x=1
f(1)=2.1-p
f(1)=m-1
x=6
f(6)=6m-1

$f(6) = \frac{7.6+4}{2} = \frac{42+4}{2} = 23$; igualando as duas equações:

23 = 6m-1
m=4
Como queremos m – p , temos:
2-p = m-1 ; igualando as duas novamente.
2-p=4-1
p=-1
m-p=4-(-1)=5

6 - RESPOSTA "D".

I – Verdadeira
II – Verdadeira
y = 0,15x – 1620
y = 0,15 . 21600 – 1620
y = 3240 – 1620
y = 1620

y = 0,15 . 10800 – 1620
y = 1620 – 1620
y = 0

III – Falsa
São duas funções (2 constantes)

7 - RESPOSTA "E".

$C(x) = \frac{x}{2} + 10000$

$F(x) = \frac{2}{3}x$
$f(x) > c(x)$

$\frac{2}{3}x > \frac{x}{2} + 10000$

$\frac{2}{3}x - \frac{x}{2} > 10000 \rightarrow \frac{4x-3x}{6}$ x > 10000 $\rightarrow \frac{4x-3x}{6}$ x > 10000 $\rightarrow$ x > $\frac{10000}{\frac{1}{6}} \rightarrow$ x > 60000

Substituindo:

$C(x) = \frac{x}{2} + 10000 = \frac{60000}{2} + 10000 = 30000 - 10000 = 20000$

$F(x) = \frac{2}{3}\,60000 = 40000$

Fm = 40000 – 20000
Fm = 20000

8 - RESPOSTA "D".

Sabendo que *f(25) = 75*, podemos dizer que *f(5 . 5) = 75* e agora, utilizando a regra dada no exercício, que diz que ***f(5x) = 5f(x)*** então *f(5 . 5) = 5.f(5)* pois o nosso x é 5, portanto,

f(5 . 5) = 75
75 = 5f(5)

$$f(5) = \frac{75}{5}$$

f(5) = 15
Agora podemos utilizar novamente a regra dada.
f(5) = 15
f(5.1) = 15
Agora o nosso x é 1. Utilizando a regra novamente
5f(1) = 15
f(1)=3

9 - RESPOSTA "E".

Olhando para as respostas, vemos que o que o exercício quer na verdade, é o valor de f(4).

É dado o valor de f(3), podemos dizer que f(3) = f(2+1) e utilizando a regra dada, que é f(x+y) = f(x) + f(y) podemos escrever *f(2+1) = f(2)+f(1)*, portanto:

f(3)= 1
f(2+1)=1
f(2)+f(1) = 1

E ainda podemos dizer que f(2) = f(1+1), e utilizando a regra, temos:

$$f(2)+f(1)=1$$
$$f(1+1)+f(1)=1$$
$$f(1)+f(1)+f(1)=1$$
$$3f(1)=1$$
$$f(1)=\frac{1}{3}$$

O que o exercício quer é o valor de f(4), podemos escrever f(4) como sendo f(3+1) e utilizando a regra dada no exercício, temos

f(4)=f(3+1)=f(3)+f(1)

Sabemos o valor de f(3), pois é dado no exercício f(3)=1 e o valor de f(1) já calculamos, portanto:

$$f(4)=f(3)+f(1)$$
$$f(4)=1+\frac{1}{3}$$

10 - RESPOSTA "D".

Se f(x) = 3 – 2x ➔ f(-5) = 3 – 2.(-5) = 3 + 10 = 13

Função do 2º Grau

Chama-se função do 2º grau ou função quadrática toda função *f* de R em R definida por um polinômio do 2º grau da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ ou $y = ax^2 + bx + c$, com *a*, *b* e *c* reais e *a* ≠0.

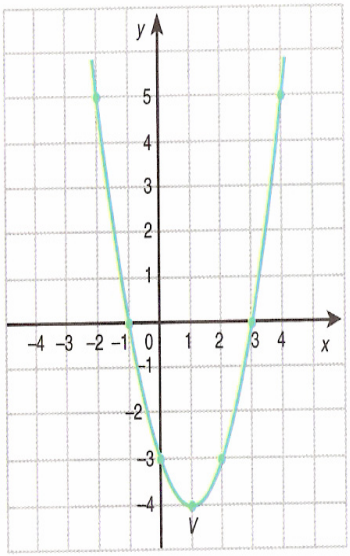
Exemplo

- $y = x^2 - 5x + 4$, sendo a = 1, b = –5 e c = 4
- $y = x^2 - 9$, sendo a = 1, b = 0 e c = –9
- $y = x^2$, sendo a = 1, b = 0 e c = 0

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FUNÇÃO DO 2º GRAU

Exemplo

Se a função *f* de R em R definida pela equação $y = x^2 - 2x - 3$. Atribuindo à variável x qualquer valor real, obteremos em correspondência os valores de *y*:



Para x = –2 temos y = $(-2)^2 - 2(-2) - 3 = 4 + 4 - 3 = 5$
Para x = –1 temos y = $(-1)^2 - 2(-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$
Para x = 0 temos y = $(0)^2 - 2(0) - 3 = -3$
Para x = 1 temos y = $(1)^2 - 2(1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$
Para x = 2 temos y = $(2)^2 - 2(2) - 3 = 4 - 4 - 3 = -3$
Para x = 3 temos y = $(3)^2 - 2(3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$
Para x = 4 temos y = $(4)^2 - 2(4) - 3 = 16 - 8 - 3 = 5$

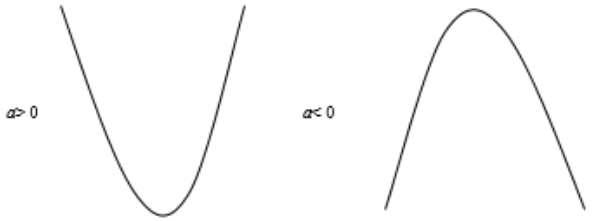
x	y	(x,y)
–2	5	(–2,5)
–1	0	(–1,0)
0	–3	(0, –3)
1	–4	(1, –4)
2	–3	(2, –3)
3	0	(3,0)
4	5	(4,5)

O gráfico da função de 2º grau é uma curva aberta chamada parábola.

O ponto V indicado na figura chama-se vértice da parábola.

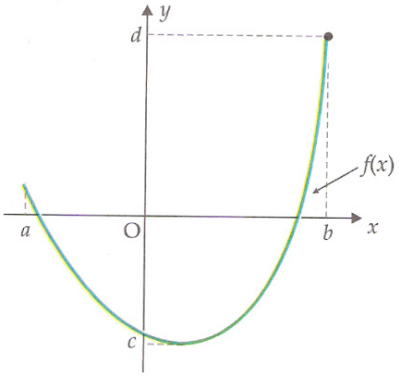
Concavidade da Parábola

No caso das funções do 2º grau, a parábola pode ter sua concavidade voltada para cima (a > 0) ou voltada para baixo (a < 0).

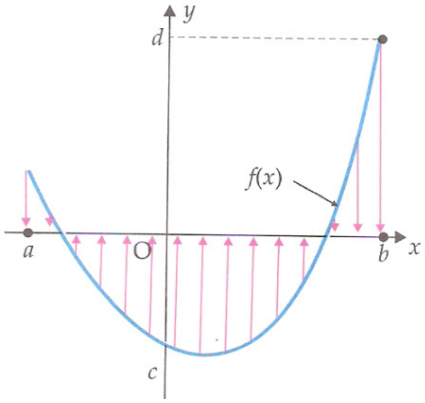


Podemos por meio do gráfico de uma função, reconhecer o seu domínio e o conjunto imagem.

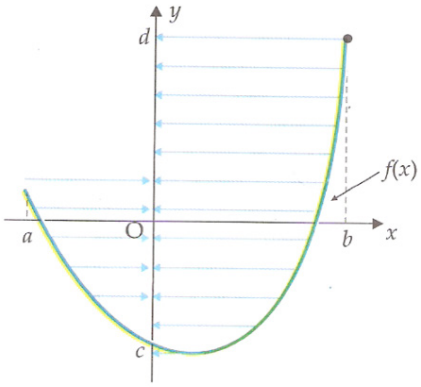
Consideremos a função *f*(x) definida por A = [a, b] em R.



Domínio: Projeção ortogonal do gráfico da função no eixo x. Assim, D = [a, b] = A



Conjunto Imagem: Projeção ortogonal do gráfico da função no eixo *y*. Assim, Im = [c, d].



Zeros da Função do 2º grau

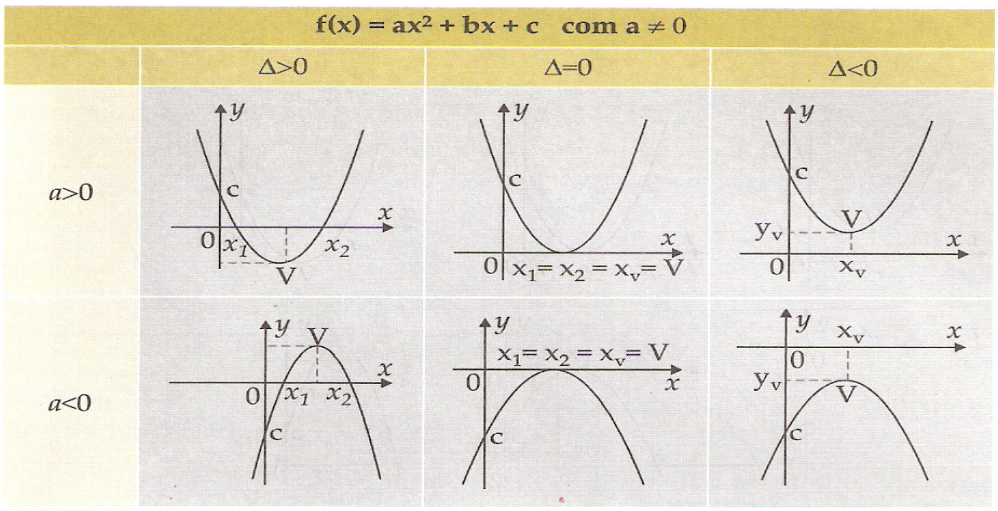
As raízes ou zeros da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores de x reais tais que $f(x) = 0$ e, portanto, as soluções da equação do 2º grau.

$ax^2 + bx + c = 0$

A resolução de uma equação do 2º grau é feita com o auxílio da chamada "fórmula de Bháskara".

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$, onde, $\Delta = b^2 - 4.a.c$

As raízes (quando são reais), o vértice e a intersecção com o eixo y são fundamentais para traçarmos um esboço do gráfico de uma função do 2º grau.

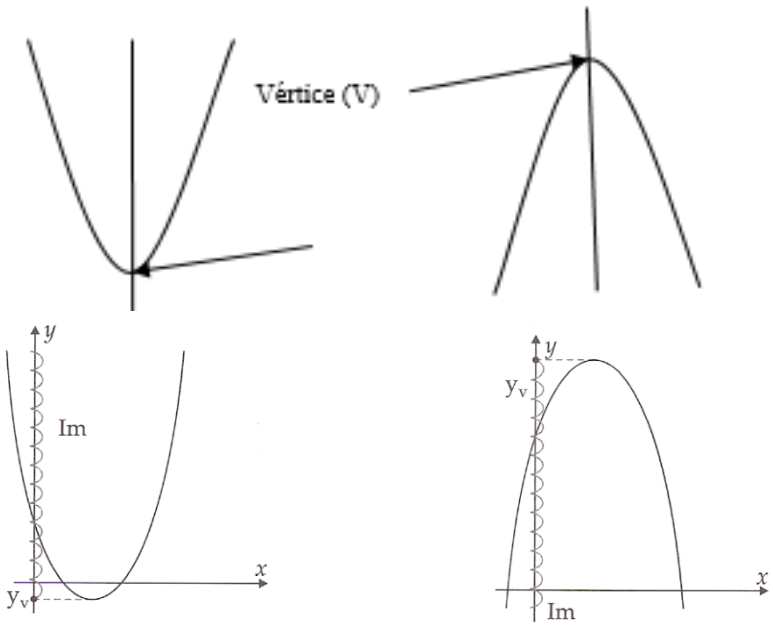


Coordenadas do vértice da parábola

A parábola que representa graficamente a função do 2º grau apresenta como eixo de simetria uma reta vertical que intercepta o gráfico num ponto chamado de vértice.

As coordenadas do vértice são:

$$x_V = \frac{-b}{2a} \quad e \quad y_V = \frac{-\Delta}{4a}$$



O Conjunto Imagem de uma função do 2º grau está associado ao seu ponto extremo, ou seja, à ordenada do vértice (y_v).

Exemplo

Vamos determinar as coordenadas do vértice da parábola da seguinte função quadrática: $y = x^2 - 8x + 15$.

Cálculo da abscissa do vértice:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2(1)} = \frac{8}{2} = 4$$

Cálculo da ordenada do vértice:

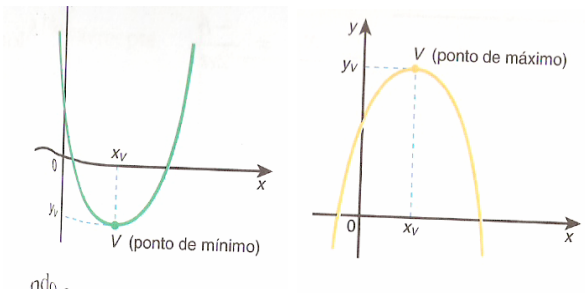
Substituindo x por 4 na função dada:

$y_V = (4)2 - 8(4) + 15 = 16 - 32 + 15 = -1$

Logo, o ponto V, vértice dessa parábola, é dado por V (4, –1).

Valor máximo e valor mínimo da função do 2º grau

- Se a > 0, o vértice é o ponto da parábola que tem ordenada mínima. Nesse caso, o vértice é chamado ponto de mínimo e a ordenada do vértice é chamada valor mínimo da função;
- Se a < 0, o vértice é o ponto da parábola que tem ordenada máxima. Nesse caso, o vértice é ponto de máximo e a ordenada do vértice é chamada valor máximo da função.



Construção do gráfico da função do 2º grau

- Determinamos as coordenadas do vértice;
- Atribuímos a x valores menores e maiores que x_V e calculamos os correspondentes valores de *y*;
- Construímos assim uma tabela de valores;
- Marcamos os pontos obtidos no sistema cartesiano;
- Traçamos a curva.

Exemplo
$y = x^2 - 4x + 3$

Coordenadas do vértice:

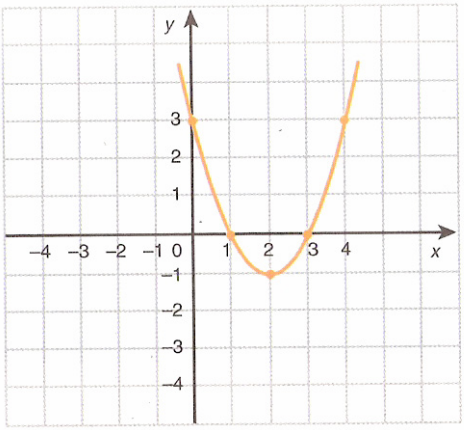
$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2 \quad V\ (2, -1)$$

$y_V = (2).2 - 4.(2) + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$

Tabela:
Para x = 0 temos $y = (0)^2 - 4(0) + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$
Para x = 1 temos $y = (1)^2 - 4(1) + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$
Para x = 3 temos $y = (3)^2 - 4(3) + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$
Para x = 4 temos $y = (4)^2 - 4(4) + 3 = 16 - 16 + 3 = 3$

X	y	(x,y)
0	3	(0,3)
1	0	(1,0)
2	–1	(2,–1)Vértice
3	0	(3,0)
4	3	(4,3)

Gráfico:



Estudos do sinal da função do 2º grau

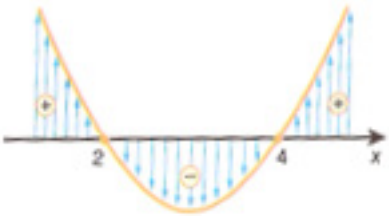
Estudar o sinal de uma função quadrática é determinar os valores reais de x que tornam a função positiva, negativa ou nula.

Exemplo
$y = x^2 - 6x + 8$

Zeros da função:

$$y = x^2 - 6x + 8$$
$$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(8)$$
$$\Delta = 36 - 32 = 4$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$$

Esboço do gráfico:



$$x = \frac{6 \pm 2}{2} \quad \nearrow \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4 \qquad \searrow \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Estudo do sinal:
Para $x < 2$ ou $x > 4$ temos $y > 0$
Para $x = 2$ ou $x = 4$ temos $y = 0$
Para $2 < x < 4$ temos $y < 0$

Exercícios resolvidos

QUESTÃO 01

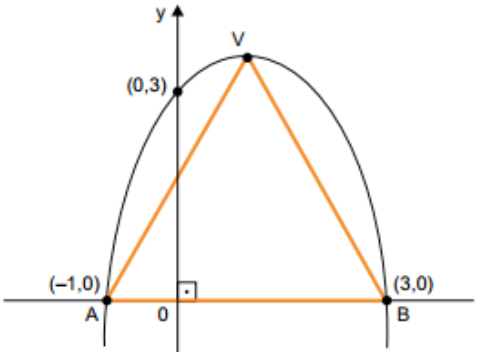
(PM/SP – SARGENTO CFS – CETRO/2012) Sabe-se que, sob um certo ângulo de tiro, a altura h atingida por uma bala, em metros, em função do tempo t, em segundos, é dada por $h(t)=-3t^2+15t$.

Portanto, é correto afirmar que, depois de 3s, a bala atingirá

A) 18 metros.
B) 20 metros.
C) 27 metros.
D) 32 metros.

QUESTÃO 02

(PM/SP – OFICIAL – VUNESP/2013)Na figura, tem-se o gráfico de uma parábola.

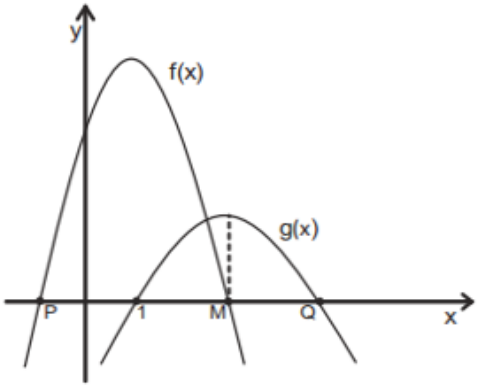


Os vértices do triângulo AVB estão sobre a parábola, sendo que os vértices A e B estão sobre o eixo das abscissas e o vértice V é o ponto máximo da parábola. A área do triângulo AVB, cujas medidas dos lados estão em centímetros, é, em centímetros quadrados, igual a

A) 8.
B) 9.
C) 12.
D) 14.
E) 16.

QUESTÃO 03

(PETROBRAS – TÉCNICO AMBIENTAL JÚNIOR – CESGRANRIO/2012-Adpatado) Sejam $f(x)=-2x^2+4x+16$ e $g(x)=ax^2+bx+c$ funções quadráticas de domínio real, cujos gráficos estão representados abaixo. A função f(x) intercepta o eixo das abscissas nos pontos $P(x_P,0)$ e $M(x_M,0)$ e g(x), nos pontos (1,0) e $Q(x_Q,0)$.



Se g(x) assume valor máximo quando $x=x_M$, conclui-se que x_Q é igual a

A) 3
B) 7
C) 9
D) 11
E) 13

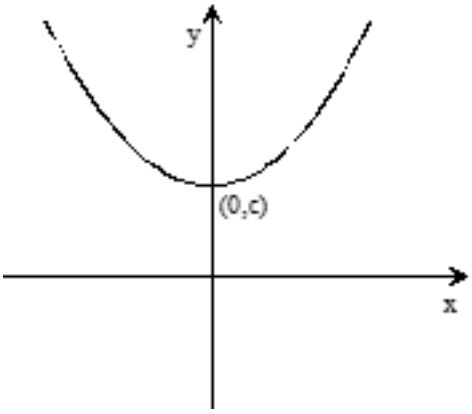
QUESTÃO 04

O lucro mensal L de uma empresa, em reais, obtido com a venda de uma unidade de certo produto é dado pela função $L(x) = x – 5$, sendo x o preço de venda do produto e R$ 5,00 o preço de custo. A quantidade Q vendida mensalmente depende do preço x do produto e é dada por $Q(x) = 120 – x$. Para a empresa obter o lucro máximo no mês, em reais, o preço de venda do produto é um número do intervalo de

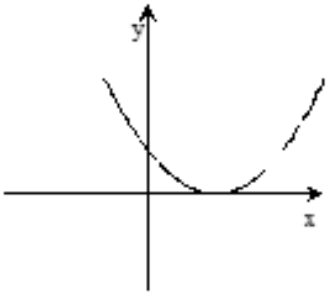
A) 33 à 50.
B) 51 à 65.
C) 66 à 72.
D) 73 à 80.

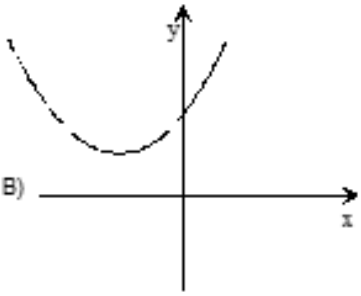
QUESTÃO 05

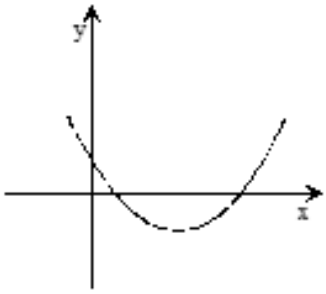
Seja f uma função real de variável real definida por $f(x) = x^2 + c$, $c > 0$ e $c \in R$, cujo gráfico é:

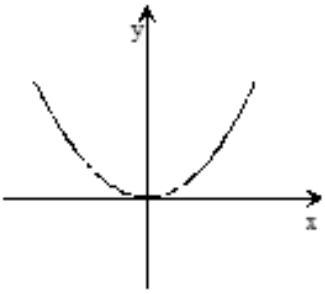


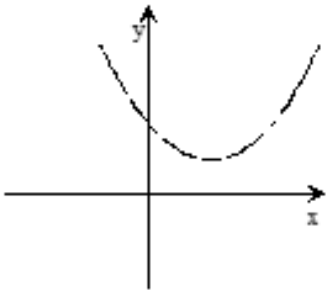
Então o gráfico que melhor representa $f(x + 1)$ é:

A)


B)


C)


D)


E)


QUESTÃO 06

Seja f a função real dada por $f(x)=ax^2+bx+c$, com $a>0$. Determine a, b e c sabendo que as raízes da equação $|f(x)|=12$ são $-2, 1, 2$ e 5.

A) a = 1; b = -6; c = 17
B) a = 1; b = 6; c = -17
C) a = -1; b = 6; c = 17
D) a = -1; b = -6; c = 17
E) a = 1; b = -6; c = -17

QUESTÃO 07

(Docente I/Pref.Coronel Fabricio) Seja uma função do segundo grau $f(x)=x^2+ax+b$, cujos zeros são números naturais consecutivos. Considerando que f(1)=2 o produto de a.b, é igual a

A) -40
B) -30
C) -20
D) -10
E) 10

QUESTÃO 08

(Professor/Pref. de Itaboraí) Seja *f* a função que associa a cada número real x o menor elemento do conjunto {(1-x).(2x+4)}.O valor máximo de f(x) é:

A) -1
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

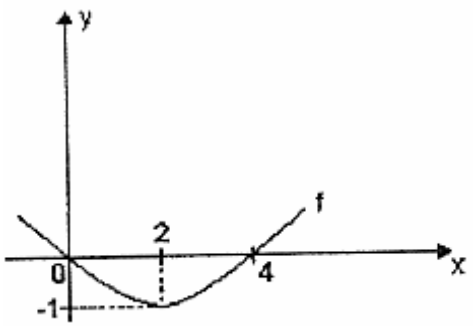
QUESTÃO 09

(TÉC.JUD./FCC) Uma empresa de prestação de serviços usa a expressão $p(x)=-x^2+80x+5$, para calcular o preço, em reais, a ser cobrado pela manutenção de x aparelhos em um mesmo local. Nessas condições, a quantia máxima a ser cobrada por essa empresa é:

A) R$ 815,00
B) R$ 905,00
C) R$ 1215,00
D) R$ 1605,00
E) R$ 1825,00

QUESTÃO 10

(CEF) Seja a função do 2º grau representada no gráfico abaixo:



Essa função é dada por:

A) $\frac{1}{4}x^2 + x$
B) $-x^2 + 4x$
C) $\frac{1}{4}x^2 - x$
D) $\frac{1}{2}x^2 - 2x$

Resoluções

1 - RESPOSTA: "A".

$$h(3) = -3 \cdot (3)^2 + 15 \cdot 3 = -27 + 45 = 18$$

A bala atingirá 18 metros.

2 - RESPOSTA: "A".

As raízes são -1 e 3

Sendo função do 2º grau: $-(x^2-Sx+P)=0$; (concavidade pra baixo a<0)

$-x^2+Sx-P=0$
$S=-1+3= 2$
$P=-1\cdot 3= -3$
$-x^2 + 2x + 3 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 12 = 16$$

$$h_{triângulo} = V_y = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$h_{triângulo} = 4$$

Base: -1até 0 e 0 até 3
Base: 1+3=4

$$A_{triÂngulo} = b \cdot \frac{h}{2} = 4 \cdot \frac{4}{2} = 8cm^2$$

3 - RESPOSTA: "B".

$-2x^2+4x+16 = 0$; a = -2 , b = 4 , c = 16

$\Delta = 16 + 128 = 144$

$x = \frac{-4 \pm 12}{-4}$

$x_1 = -2$

$x_2 = 4$

ax^2+bx+c

$x = xm = -\frac{b}{2a} = 4$

$-b = 8a$

A soma das raízes é –b/a

$-\frac{b}{a} = 8$

Se já sabemos que uma raiz é 1:

$1 + x_Q = 8$

$x_Q = 7$

4 - RESPOSTA "B".

Vamos lá, o lucro total é dado pelo produto das funções, pois cada unidade de um lucro L(x) e eles vendem Q(x) unidades, então: Lucro total= L(x) . Q(x) = (x - 5)(120 - x) = 120x - x^2 - 600 + 5x = -x^2 + 125x - 600 essa é uma função do segundo grau e como o coeficiente do x^2 é negativo ela admite um valor máximo e como queremos saber o preço de venda de x que admite um lucro máximo calculamos o x do vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2.a} = \frac{-125}{2.(-1)} = \frac{-125}{-2} = 62{,}5$$

O valor de 62,5 esta entre o intervalo de 51 à 65.

5 - RESPOSTA "B".

A questão requer habilidade no uso de gráficos de funções quadráticas.

f(x + 1) = $(x + 1)^2$+ c = x^2 + 2x + 1 + c.

O discriminante Δ = 4 – 4 (1 + c) = – 4c é menor que zero.

$$xv = \frac{-b}{2.a} = \frac{-2}{2.1} = -1$$

$$yv = \frac{-\Delta}{4.a} = \frac{-(-4c)}{4.1} = c$$

Por isso, o gráfico que melhor representa f(x + 1) está na alternativa B.

6 - RESPOSTA "A".

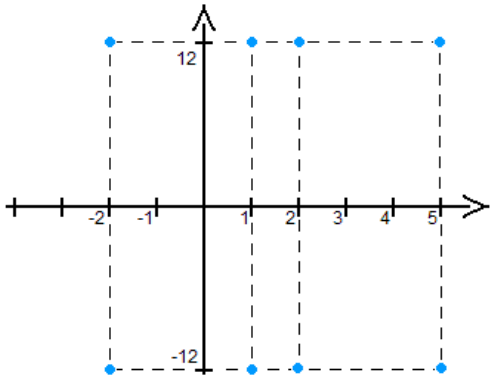
Começamos interpretando as informações dadas a respeito de $f(x)$.

Se -2 é raiz de $|f(x)| = 12$, então temos que $|f(-2)| = 12$ e isso implica que $f(-2)$ vale 12 ou -12.

Com esse mesmo raciocínio vemos que $f(1)$ também só pode valer 12 ou -12.

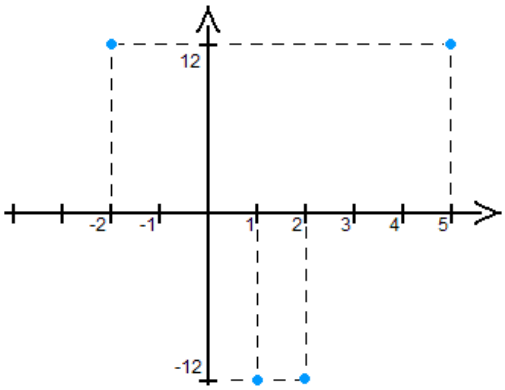
Isso também acontece para $f(2)$ e $f(5)$ (todas as raízes de $|f(x)| = 12$).

Assim, podemos desenhar estas possibilidades em um gráfico cartesiano:



Os pontos assinalados em azul na figura acima são as possibilidades descritas anteriormente. Agora, para desenhar uma parábola nestes pontos, note que não podemos escolher todos igual a 12. Pois, assim, teríamos quatro pontos com mesmo valor de Y, e em uma parábola só é possível ter dois pontos com mesma ordenada.

Veja que a única configuração que poderia gerar uma parábola com concavidade para cima (pois o enunciado diz que a > 0), é como mostrado abaixo:



Com esta constatação, temos as informações:

$$f(-2)=12$$
$$f(1)=-12$$
$$f(2)=-12$$
$$f(5)=12$$

E, agora, substituindo estas quatro informações na equação dada no enunciado $f(x)=ax^2+bx+c$, podemos montar um sistema para descobrir a, b e c.

Efetuando os cálculos:

$$\begin{cases} 4a-2b+c=12 \\ a+b+c=-12 \\ 4a+2b+c=-12 \\ 25a+5b+c=12 \end{cases}$$

Fazemos a terceira equação menos a primeira:

$$4b=-24$$
$$b=\frac{-24}{4}$$
$$b=-6$$

Agora substituímos este valor de b na segunda e na quarta equações:

$$\begin{cases} a-6+c=12 \\ 25a+5(-6)+c=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+c=18 \\ 25a+c=42 \end{cases}$$

Fazendo, agora, a segunda equação menos a primeira:

$$24a=24$$
$$a=1$$

Agora substituímos este valor de "a" na equação $a+c=18$:

$$1+c=18$$
$$c=17$$

7 - RESPOSTA: "B".

Façamos f(1)=2

2=1+a+b ➔a+b=1

Como as raízes são números naturais consecutivos temos que x_1= n e x_2=n+1

Pela propriedade Soma e Produto temos:

S= -a ➔ x_1+x_2=-a ➔ n+n+1=-a ➔ -a=2n+1 .(-1)➔ a=-2n-1

P= b ➔ x_1 .x_2=b ➔ n.(n-1) = b ➔ b=n^2+n

Como a+b=1, temos:

-2n-1+n^2+n=1➔ n^2 - n – 2=0

S= 1/1 = 1 v dois números que somados de 1 ➔ 2-1 = 1

P = -2/1 = -2 ➔ dois números que multiplicados de -2 ➔ 2.(-1) = -2

Logo x_1= 2 e x_2= -1

Como o enunciado fala de números naturais, descartamos o -1.

As raízes naturais consecutivas: n = 2 e n+1 = 3

As soma das raízes S=a= -2n-1 ➔ -2.2-1 = -5 ou 2+3(soma das raízes)

O produto é P=b= n^2+n ➔ $(2)^2$+2 ➔ 4+2 = 6 ou 2.3 (produto das raízes)

Calculando o que o enunciado pede : a.b = (-5).6 = -30

8 - RESPOSTA: "C".

Vamos resolver a função dada por f(x)=(1-x).(2x+4) ➔ f(x) = 2 – $2x^2$, como o valor de *a* é negativo, temos que a concavidade é para baixo, se procuramos o valor máximo, procuramos o valor do *y* do vértice, dado pela fórmula:

$$yv=\frac{-\Delta}{4a}\rightarrow\frac{-(b^2-4ac)}{4a}\rightarrow\frac{-(0^2-4.(-2).2)}{4.(-2)}\rightarrow\frac{-(16)}{-8}\rightarrow 2$$

9 - RESPOSTA: "D".

Como queremos o máximo, sabemos que utilizaremos os valores dos vértices(y_v), dado por: (a=-1, b=80 , c=5)

$$yv=\frac{-\Delta}{4a}\rightarrow\frac{-(b^2-4ac)}{4a}\rightarrow\frac{-((80)^2-4.(-1).5)}{4.(-1)}\rightarrow\frac{-(6400+20)}{-4}\rightarrow 1605$$

Logo, a quantia máxima a ser cobrada é de R$ 1605,00.

10 - RESPOSTA: "C".

A forma geral de uma função do segundo grau é f(x)= y = ax^2 + bx + c

Sabemos (do gráfico acima) que 0 e 4 são raízes da equação(onde os valores se anulam),temos que:

- 0 = a . (0) + b . (0) + c, donde retiramos o valor de 'c': c = 0. Este ponto também poderia ter sido retirado diretamente do gráfico, pois 'c' é o ponto em que a curva corta o eixo y.

- 0 = a. $(4)^2$ + b . (4), ou seja: 16a + 4b = 0 (equação 1)

- Uma outra equação poderá ser retirada a partir do vértice da parábola:

-1 = a. $(2)^2$ + b . (2), ou: 4a + 2b = -1 (equação 2)

Com as equações 1 e 2 acima, montamos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 16a+4b=0 \\ 4a+2b=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16a+4b=0\ (:-4) \\ 4a+2b=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4a-b=0 \\ 4a+2b=-1 \end{cases} \Rightarrow \text{Somando obtemos } b=-1\text{, substituímos em uma expressão:}$$

$$4a+2.(-1)=-1 \rightarrow 4a-2=-1 \rightarrow 4a=-1+2 \rightarrow 4a=1 \rightarrow a=\frac{1}{4}$$

Montando a expressão da função temos:

$$f(x) = y = \frac{1}{4}x^2 - x$$

Inequação do 1° Grau

Inequação é toda sentença aberta expressa por uma desigualdade.

As inequações $x + 5 > 12$ e $2x - 4 \leq x + 2$ são do 1º grau, isto é, aquelas em que a variável x aparece com expoente 1.

A expressão à esquerda do sinal de desigualdade chama-se primeiro membro da inequação. A expressão à direita do sinal de desigualdade chama-se segundo membro da inequação.

Na inequação $x + 5 > 12$, por exemplo, observamos que:

A variável é x;
O primeiro membro é $x + 5$;
O segundo membro é 12.

Na inequação $2x - 4 \leq x + 2$:
A variável é x;
O primeiro membro é $2x - 4$;
O segundo membro é $x + 2$.

Propriedades da desigualdade

Propriedade Aditiva:
Exemplo:

Mesmo sentido

Se $8 > 3$, então $8 + 2 > 3 + 2$, isto é: $10 > 5$.

Somamos +2 aos dois membros da desigualdade

Uma desigualdade não muda de sentido quando adicionamos ou subtraímos um mesmo número aos seus dois membros.

Propriedade Multiplicativa:
Exemplo:

Mudou de sentido

Se $8 > 3$, então $8 . (-2) < 3 . (-2)$, isto é: $-16 < -6$

Multiplicamos os dois membros por -2

Uma desigualdade não muda de sentido quando multiplicamos ou dividimos seus dois membros por um mesmo número positivo.

Exemplo:

Mudou de sentido

Se $8 > 3$, então $8 \cdot (-2) < 3 \cdot (-2)$, isto é: $-16 < -6$

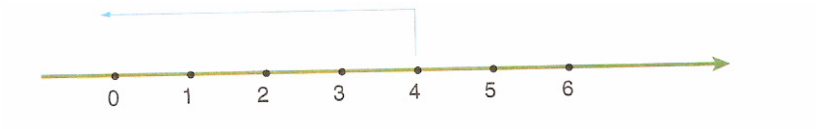
Multiplicamos os dois membros por -2

Uma desigualdade muda de sentido quando multiplicamos ou dividimos seus dois membros por um mesmo número negativo.

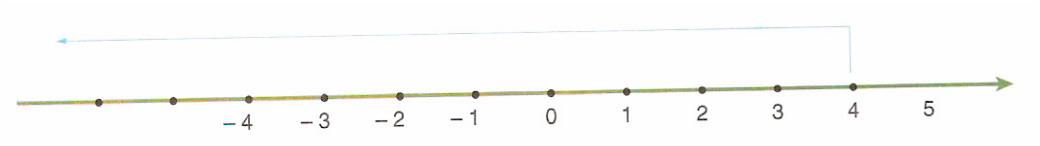
Resolver uma inequação é determinar o seu conjunto verdade a partir de um conjunto universo dado.

Vejamos, através do exemplo, a resolução de inequações do 1º grau.

a) $x < 5$, sendo $U = N$



Os números naturais que tornam a desigualdade verdadeira são: 0, 1, 2, 3 ou 4. Então $V = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.



b) $x < 5$, sendo $U = Z$

Todo número inteiro menor que 5 satisfaz a desigualdade. Logo, $V = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

c) $x < 5$, sendo $U = Q$

Todo número racional menor que 5 é solução da inequação dada. Como não é possível representar os infinitos números racionais menores que 5 nomeando seus elementos, nós o faremos por meio da propriedade que caracteriza seus elementos. Assim:

$V = \{x \in Q \ / \ x < 5\}$

Resolução prática de inequações do 1º grau:

A resolução de inequações do 1º grau é feita procedendo de maneira semelhante à resolução de equações, ou seja, transformando cada inequação em outra inequação equivalente mais simples, até se obter o conjunto verdade.

Exemplo

Resolver a inequação $4(x - 2) \leq 2(3x + 1) + 5$, sendo $U = Q$.

$4(x - 2) \leq 2(3x + 1) + 5$

$4x - 8 \leq 6x + 2 + 5$ aplicamos a propriedade distributiva

$4x - 6x \leq 2 + 5 + 8$ aplicamos a propriedade aditiva

$-2x \leq 15$ reduzimos os termos semelhantes

Multiplicando os dois membros por –1, devemos mudar o sentido da desigualdade.
$2x \geq -15$

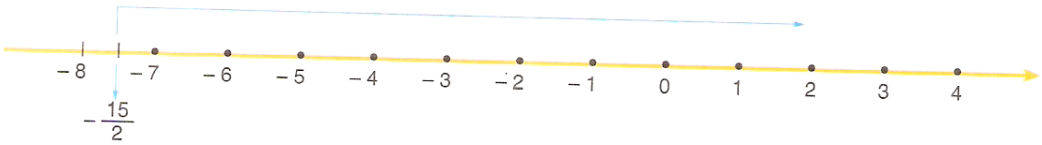
Dividindo os dois membros por 2, obtemos:

$$\frac{2x}{2} \geq -\frac{15}{2} \Rightarrow x \geq -\frac{15}{2}$$

Logo, V = $\left\{x \in Q \mid x \geq -\frac{15}{2}\right\}$

Vamos determinar o conjunto verdade caso tivéssemos U = Z.

Sendo $-\frac{15}{2} = -7{,}5$, vamos indicá-lo na reta numerada:



Logo, V = {–7, –6, –5, –4, ...} ou V = {x ∈ Z | x ≥ –7}.

Exercícios resolvidos

QUESTÃO 01
Resolver a inequação 7x + 6 > 4x + 7, sendo U = Q.

QUESTÃO 02
Resolver a inequação $\frac{x}{2} \leq \frac{1}{4} - \frac{2x - 3x}{5}$, sendo U = Q.

QUESTÃO 03
Verificar se os números racionais −9 e 6 fazem parte do conjunto solução da inequação 5x − 3 · (x + 6) > x – 14.

QUESTÃO 04
Resolva as seguintes inequações, em R.
a) 2x + 1 ≤ x + 6
b) 2 - 3x ≥ x + 14

QUESTÃO 05
Calcule as seguintes inequações, em R.
a) 2(x + 3) > 3 (1 - x)
b) 3(1 - 2x) < 2(x + 1) + x - 7
c) x/3 - (x+1)/2 < (1 - x) / 4

QUESTÃO 06
Resolva as seguintes inequações, em R.
a) (x + 3) > (-x-1)
b) [1 - 2*(x-1)] < 2
c) 6x + 3 < 3x + 18

QUESTÃO 07
Calcule as seguintes inequações, em R.
a) 8(x + 3) > 12 (1 - x)
b) (x + 10) > (-x +6)

QUESTÃO 08
Resolva a inequação: 2 – 4x ≥ x + 17

QUESTÃO 09
Calcule a inequação 3(x + 4) < 4(2 –x).

QUESTÃO 10
Quais os valores de X que tornam a inequação -2x +4 > 0 verdadeira?

Resoluções

1) Resposta
$S = \left\{x \in Q / x > \frac{1}{3}\right\}$.
Solução:
7x + 6 > 4x + 7
7x – 4x > 7 – 6
3x > 1
X >

Da inequação X > $\frac{1}{3}$, podemos dizer que todos os números racionais maiores que $\frac{1}{3}$ formam o conjunto solução de inequação dada, que é representada por:

2) Resposta

"$S = \left\{x \in Q / x > \frac{3}{2}\right\}$".

Solução:

$\frac{x}{2} \leq \frac{1}{4} - \frac{2x-3x}{5} \rightarrow \frac{10x}{20} \leq \frac{5-4.(2-3x)}{20} =$

10x ≤ 5 – 4 .(2 – 3x)
10x ≤ 5 – 8 + 12x
10x – 12 x ≤ -3
-2x ≤ -3 (-1)
2x ≥ 3

x ≥ $\frac{3}{2}$.

Todo número racional maior ou igual a $\frac{3}{2}$ faz parte do conjunto solução da inequação dada, ou seja:

$S = \left\{x \in Q / x > \frac{3}{2}\right\}$

3) Resposta "6 faz parte; -9 não faz parte".
Solução:
5x – 3 · (x + 6) > x – 14
5x – 3x – 18 > x – 14
2x – x > -18 + 14
x > 4

Fazendo agora a verificação:
- Para o número −9, temos: x > 4 → − 9 > 4 (sentença falsa)
- Para o número 6, temos: x > 4 → 6 > 4 (sentença verdadeira)

Então, o número 6 faz parte do conjunto solução da inequação, enquanto o número −9 não faz parte desse conjunto.

4) Solução:
a) 2x - x + 1 ≤ x - x + 6
x + 1 ≤ 6
x ≤ 5

b) 2 - 3x - x ≥ x - x + 14
2 - 4x ≥ 14
-4x ≥ 12
- x ≥ 3
x ≤ -3

5) Solução:
a) 2x + 6 > 3 - 3x
2x - 2x + 6 > 3 - 3x - 2x
6 - 3 > -5x
3 > - 5x
-x < 3/5
x > -3/5

b) 3 - 6x < 2x + 2 + x - 7
-6x - 3x < -8
-9x < -8
9x > 8
x > 8/9

c) Primeiro devemos achar um mesmo denominador.

$\frac{4x}{12} - \frac{6.(x+1)}{12} < \frac{3.(1-x)}{12}$

$\frac{4x-6x-6}{12} -< \frac{3-3x}{12}$

-2x - 6 < 3 - 3x
x < 9

6) Solução:
a) $x + 3 > -x - 1$
$2x > -4$
$x > -4/2$
$x > -2$

b) $1 - 2x + 2 < 2$
$- 2x < 2 - 1 - 2$
$- 2x < -1$
$2x > 1$
$x > 1/2$

c) $6x - 3x < 18 - 3$
$3x < 15$
$x < 15/3$
$x < 5$

7) Solução:
a) $8x + 24 > 12 - 12x$
$20x > 12 - 24$
$20x > -12$
$x > -12/20$
$x > -3/5$

b) $x + x > 6 - 10$
$2x > -4$
$x > -4/2$
$x > -2$

8) Resposta "x -3".
Solução:
$2 – 4x – x \geq x – x + 17$
$2 – 5x \geq 17$
$-5x \geq 17 – 2$
$-5x \geq 15$
$5x \leq -15$
$x \leq -3$

9) Resposta "x > -7/4".
Solução:
$3x + 12 < 8 – 4x$
$3x – 3x + 12 < 8 – 4x – 3x$
$12 < 8 – 7x$
$12 – 8 < – 7x$
$4 < – 7x$
$-x > 7/4$
$x > -7/4$

10) Solução:
$-2x > -4$
$-2x > -4\ (-1)$
$2x < 4$
$x< 2$

O número 2 não é a solução da inequação dada, mais sim qualquer valor menor que 2.

Verifique a solução:
Para x = 1
$-2x +4 > 0$
$-2.(1) +4 > 0$
$-2 + 4 > 0$
$2 > 0$ (verdadeiro)
Observe, então, que o valor de x menor que 2 é a solução para inequação.

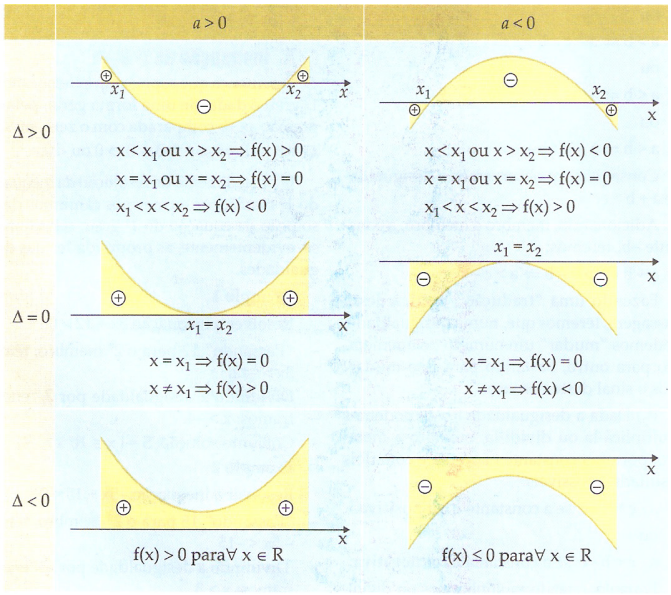
Inequações do 2° Grau

Chamamos inequação do 2º grau às sentenças:
$ax^2 + bx + c > 0$
$ax^2 + bx + c \geq 0$
$ax^2 + bx + c < 0$
$ax^2 + bx + c \leq 0$

Onde *a*, *b*, *c* são números reais conhecidos, $a \neq 0$, e x é a incógnita.

Estudo da variação de sinal da função do 2º grau:
- Não é necessário que tenhamos a posição exata do vértice, basta que ele esteja do lado certo do eixo x;
- Não é preciso estabelecer o ponto de intersecção do gráfico da função com o eixo y e, considerando que a imagens acima do eixo x são positivas e abaixo do eixo negativas, podemos dispensar a colocação do eixo y.

Para estabelecermos a variação de sinal de uma função do 2º grau, basta conhecer a posição da concavidade da parábola, voltada para cima ou para baixo, e a existência e quantidade de raízes que ela apresenta.



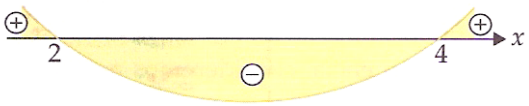
Consideremos a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$.

Finalmente, tomamos como solução para inequação as regiões do eixo x que atenderem às exigências da desigualdade.

Exemplo

Resolver a inequação $x^2 - 6x + 8 \geq 0$.

- Fazemos $y = x^2 - 6x + 8$.
- Estudamos a variação de sinal da função y.



- Tomamos, como solução da inequação, os valores de x para os quais $y > 0$:

$S = \{x \in R \mid x < 2 \text{ ou } x > 4\}$

Observação: Quando o universo para as soluções não é fornecido, fazemos com que ele seja o conjunto R dos reais.

Exercícios resolvidos

QUESTÃO 01

Identifique os coeficientes de cada equação e diga se ela é completa ou não:

a) $5x^2 - 3x - 2 = 0$

b) $3x^2 + 55 = 0$

QUESTÃO 02

Dentre os números -2, 0, 1, 4, quais deles são raízes da equação $x^2-2x-8= 0$?

QUESTÃO 03

O número -3 é a raíz da equação $x^2 - 7x - 2c = 0$. Nessas condições, determine o valor do coeficiente c:

QUESTÃO 04

Resolver a inequação $3x^2 + 10x + 7 < 0$.

QUESTÃO 05

Determine a solução da inequação $-2x^2 - x + 1 \leq 0$.

QUESTÃO 06

Calcule a solução da inequação $x^2 - 6x + 9 > 0$.

QUESTÃO 07

Determine a solução da inequação $x^2 - 4x \geq 0$.

QUESTÃO 08

Resolva a inequação $-x^2 + 4 \geq 0$.

QUESTÃO 09

Identifique os coeficientes de cada equação e diga se ela é completa ou não:

a) $x^2 - 6x = 0$

b) $x^2 - 10x + 25 = 0$

QUESTÃO 08

Para que os valores de x a expressão $x^2 - 2x$ é maior que -15?

Resoluções

1) Solução:

a) a = 5; b = -3; c = -2

Equação completa

b) a = 3; b = 0; c = 55

Equação incompleta

2) Solução:

Sabemos que são duas as raízes, agora basta testarmos.

$(-2)^2 - 2.(-2) - 8 = 0 \rightarrow (-2)^2 + 4 - 8 \rightarrow 4 + 4 - 8 = 0$ (achamos uma das raízes)

$0^2 - 2.0 - 8 = 0 \rightarrow 0 - 0 - 8 \neq 0$

$1^2 - 2.1 - 8 = 0 \rightarrow 1 - 2 - 8 \neq 0$

$4^2 - 2.4 - 8 = 0 \rightarrow 16 - 8 - 8 = 0$ (achamos a outra raiz)

3) Solução:

$(-3)^2 - 7.(-3) - 2c = 0$

$9 + 21 - 2c = 0$

$30 = 2c$

$c = 15$

4) Resposta "

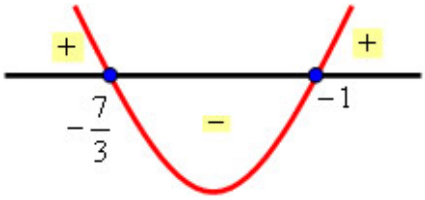
$S = \{x \in R \,/\, -7/3 < x < -1\}$".

Solução:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 10^2 - 4*3*7$$
$$\Delta = 100 - 84$$
$$\Delta = 16$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{16}}{2*3}$$
$$x = \frac{-10 \pm 4}{6}$$
$$x' = \frac{-10+4}{6} = -\frac{6}{6} = -1$$
$$x'' = \frac{-10-4}{6} = -\frac{14}{6} = -\frac{7}{3}$$

GRUPO NOVA

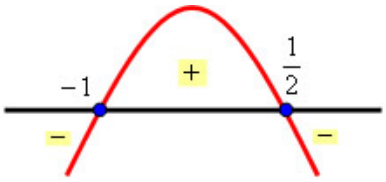


$S = \{x \in R \ / \ -7/3 < x < -1\}$

5) Resposta
"$S = \{x \in R \ / \ x < -1 \text{ ou } x > 1/2\}$ ".
Solução:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-1)^2 - 4*(-2)*1$$
$$\Delta = 1 + 8$$
$$\Delta = 9$$

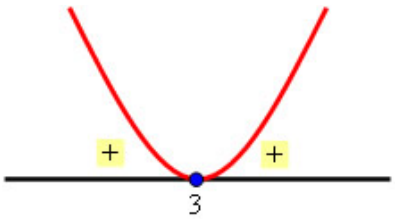
$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2*(-2)}$$
$$x = \frac{1 \pm 3}{-4}$$
$$x' = \frac{1+3}{-4} = -\frac{4}{4} = -1$$
$$x'' = \frac{1-3}{-4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



$S = \{x \in R \ / \ x < -1 \text{ ou } x > 1/2\}$

6) Resposta
"$S = \{x \in R \ / \ x < 3 \text{ e } x > 3\}$".
Solução:

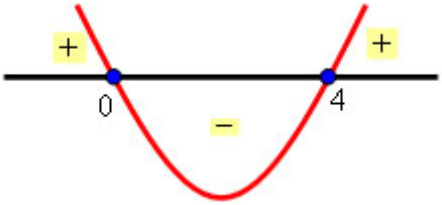
$$\Delta = (-6)^2 - 4*1*9$$
$$\Delta = 36 - 36$$
$$\Delta = 0$$
$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2*1}$$
$$x = \frac{6}{2}$$
$$x' = 3$$



$S = \{x \in R \ / \ x < 3 \text{ e } x > 3\}$

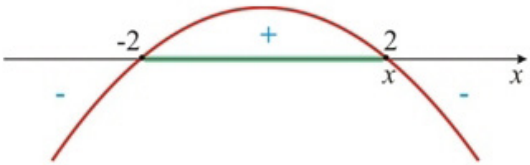
7) Resposta
"$S = \{x \in R \ / \ x \leq 0 \text{ ou } x \geq 4\}$".
Solução:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16}}{2*1}$$
$$x = \frac{4 \pm 4}{2}$$
$$x' = \frac{4+4}{2} = 4$$
$$x'' = \frac{4-4}{2} = \frac{0}{2} = 0$$



$S = \{x \in R \ / \ x \leq 0 \text{ ou } x \geq 4\}$

8) Resposta
"S = {x R/ -2 x ".
Solução:
$-x^2 + 4 = 0.$
$x^2 - 4 = 0.$
$x_1 = 2$
$x_2 = -2$



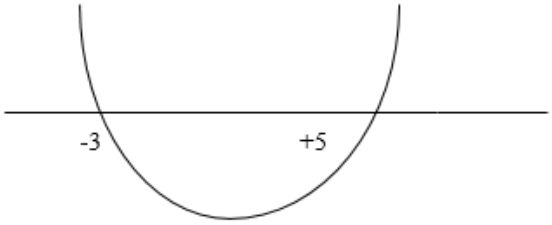
S = {x R/ -2 x .

9) Solução:
a) $a = 1; b = -6; c = 0$
Equação incompleta

b) a = 1; b = -10; c = 25
Equação completa

10) Solução:
$x^2 - 2x > 15$
$x^2 - 2x - 15 > 0$

Calculamos o Zero:



$x^2 - 2x - 15 = 0$
$x = -3$ ou $x = +5$

Função Logarítmica

Toda equação que contém a **incógnita** na **base** ou no **logaritmando** de um logaritmo é denominada **equação logarítmica**. Abaixo temos alguns exemplos de equações logarítmicas:

$$\log_2 x = 3$$
$$7\log_5 625x = 42$$
$$3\log_{2x} 64 = 9$$
$$\log_{-6-x} 2x = 1$$

Perceba que nestas equações a **incógnita** encontra-se ou no **logaritmando**, ou na **base** de um logaritmo. Para solucionarmos **equações logarítmicas** recorremos a muitas das propriedades dos logaritmos.

Solucionando Equações Logarítmicas

Vamos solucionar cada uma das equações acima, começando pela primeira: $\log_2 x = 3$

Segundo a definição de logaritmo nós sabemos que: $\log_2 x = 3 \Leftrightarrow 2^3 = x$

Logo **x** é igual a **8**: $2^3 = x \Rightarrow x = 2 \cdot 2 \cdot 2 \Rightarrow x = 8$

De acordo com a definição de logaritmo o **logaritmando** deve ser um número real positivo e já que **8** é um número real positivo, podemos aceitá-lo como solução da equação. A esta restrição damos o nome de **condição de existência**.

Pela definição de logaritmo a **base** deve ser um número real e positivo além de ser diferente de **1**.Então a nossa condição de existência da equação acima é que: $x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

Em relação a esta segunda equação nós podemos escrever a seguinte sentença:

$$\log_x 100 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 100$$

Que nos leva aos seguintes valores de **x**:

$$x^2 = 100 \Rightarrow x = \pm\sqrt{100} \Rightarrow \begin{cases} x = -10 \\ x = 10 \end{cases}$$

Note que **x = -10** não pode ser solução desta equação, pois este valor de **x** não satisfaz a condição de existência, já que **-10** é um número negativo.

Já no caso de **x = 10** temos uma solução da equação, pois **10** é um valor que atribuído a **x** satisfaz a condição de existência, visto que **10** é positivo e diferente de **1**.

$$7\log_5 625x = 42$$

GRUPO NOVA

Neste caso temos a seguinte condição de existência:

$$625x > 0 \Rightarrow x > \frac{0}{625} \Rightarrow x > 0$$

Voltando à equação temos:

$$7\log_5 625x = 42 \Rightarrow \log_5 625x = \frac{42}{7} \Rightarrow \log_5 625x = 6$$

Aplicando a mesma propriedade que aplicamos nos casos anteriores e desenvolvendo os cálculos temos:Como **25** satisfaz a condição de existência, então **S = {25}** é o conjunto solução da equação.Se quisermos recorrer a outras propriedades dos logaritmos também podemos resolver este exercício assim:

$$\Rightarrow \log_5 x = 2 \Leftrightarrow 5^2 = x \Rightarrow x = 25$$

Lembre-se que $\log_b (M \cdot N) = \log_b M + \log_b N$ e que **$\log_5$ 625 = 4, pois 5^4 = 625**.

$$3\log_{2x} 64 = 9$$

Neste caso a condição de existência em função da base do logaritmo é um pouco mais complexa: $2x > 0 \Rightarrow x > \frac{0}{2} \Rightarrow x > 0$

E, além disto, temos também a seguinte condição: $2x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$

Portanto a condição de existência é: $x \in \mathbb{R}_+^* - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Agora podemos proceder de forma semelhante ao exemplo anterior:Como **x = 2** satisfaz a condição de existência da equação logarítmica, então **2** é solução da equação.Assim como no exercício anterior, este também pode ser solucionado recorrendo-se à outra propriedade dos logaritmos:

$$\log_{-6-x} 2x = 1$$

Neste caso vamos fazer um pouco diferente. Primeiro vamos solucionar a equação e depois vamos verificar quais são as condições de existência:Então **x = -2** é um valor candidato à solução da equação.Vamos analisar as condições de existência da base **-6 - x**:

Veja que embora **x ≠ -7**, **x** não é menor que **-6**, portanto **x = -2** não satisfaz a condição de existência e não pode ser solução da equação.Embora não seja necessário, vamos analisar a condição de existência do logaritmando**2x**:

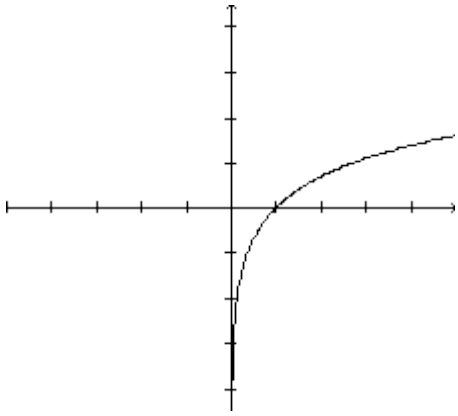
$$2x > 0 \Rightarrow x > 0$$

Como **x = -2**, então **x** também não satisfaz esta condição de existência, mas não é isto que eu quero que você veja.O que eu quero que você perceba, é que enquanto uma condição diz que **x < -6**, a outra diz que **x > 0**.Qual é o número real que além de ser menor que **-6** é também maior que **0**?

Como não existe um número real negativo, que sendo menor que **-6**, também seja positivo para que seja maior que zero, então sem solucionarmos a equação nós podemos perceber que a mesma não possui solução, já que nunca conseguiremos satisfazer as duas condições simultaneamente.O conjunto solução da equação é portanto**S = {}**, já que não existe nenhuma solução real que satisfaça as condições de existência da equação.

Função Logarítmica

A função logaritmo natural mais simples é a função $y=f_0(x)=\ln x$. Cada ponto do gráfico é da forma (x, lnx) pois a ordenada é sempre igual ao logaritmo natural da abscissa.



O domínio da função ln é $\mathbb{R}_+^* =]0, \infty[$ e a imagem é o conjunto $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

O eixo vertical é uma assíntotaao gráfico da função. De fato, o gráfico se aproxima cada vez mais da reta x=0

O que queremos aqui é descobrir como é o gráfico de uma função logarítmica natural geral, quando comparado ao gráfico de y=ln x, a partir das transformações sofridas por esta função. Consideremos uma função logarítmica cuja expressão é dada por $y=f_1(x)=\ln x+k$, onde k é uma constante real. A pergunta natural a ser feita é: qual a ação da constante k no gráfico dessa nova função quando comparado ao gráfico da função inicial $y=f_0(x)=\ln x$?

Ainda podemos pensar numa função logarítmica que seja dada pela expressão $y=f_2(x)=a.\ln x$ onde a é uma constante real, $a \neq 0$. Observe que se a=0, a função obtida não será logarítmica, pois será a constante real nula. Uma questão que ainda se coloca é a consideração de funções logarítmicas do tipo $y=f_3(x)=\ln(x+m)$, onde m é um número real não nulo. Se $g(x)=3.\ln(x-2) + 2/3$, desenhe seu gráfico, fazendo os gráficos intermediários, todos num mesmo par de eixos.

y=a.ln(x+m)+k

Conclusão: Podemos, portanto, considerar funções logarítmicas do tipo $y = f_4(x) = a \ln (x + m) + k$, onde o coeficiente a não é zero, examinando as transformações do gráfico da função mais simples $y = f_0 (x) = \ln x$, quando fazemos, em primeiro lugar, y=ln(x+m); em seguida, y=a.ln(x+m) e, finalmente, y=a.ln(x+m)+k.

Analisemos o que aconteceu:

- em primeiro lugar, y=ln(x+m) sofreu uma translação horizontal de -m unidades, pois x=-m exerce o papel que x=0 exercia em y=ln x;
- a seguir, no gráfico de y=a.ln(x+m) ocorreu mudança de inclinação pois, em cada ponto, a ordenada é igual àquela do ponto de mesma abscissa em y=ln(x+m) multiplicada pelo coeficiente a;
- por fim, o gráfico de y=a.ln(x+m)+k sofreu uma translação vertical de k unidades, pois, para cada abscissa, as ordenadas dos pontos do gráfico de y=a.ln(x+m)+k ficaram acrescidas de k, quando comparadas às ordenadas dos pontos do gráfico de y=a.ln(x+m).

O estudo dos gráficos das funções envolvidas auxilia na resolução de equações ou inequações, pois as operações algébricas a serem realizadas adquirem um significado que é visível nos gráficos das funções esboçados no mesmo referencial cartesiano.

Função logarítmica de base a é toda função $f:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_a x$ com $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$.

Podemos observar neste tipo de função que a variável independente **x** é um logaritmando, por isto a denominamos **função logarítmica**. Observe que a base **a** é um valor real constante, não é uma variável, mas sim um número real.

A **função logarítmica** de $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é inversa da função exponencial de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ e vice-versa, pois:

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

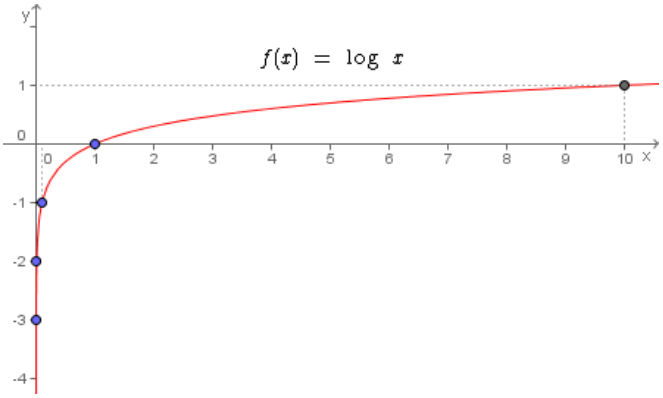
Representação da Função Logarítmica no Plano Cartesiano

Podemos representar graficamente uma função logarítmica da mesma forma que fizemos com a função exponencial, ou seja, escolhendo alguns valores para **x** e montando uma tabela com os respectivos valores de **f(x).** Depois localizamos os pontos no plano cartesiano e traçamos a curva do gráfico.Vamos representar graficamente a função $f(x) = \log x$ e como estamos trabalhando com um logaritmo de base **10**, para simplificar os cálculos vamos escolher para **x** alguns valores que são potências de **10**:

0,001, **0,01**, **0,1**, **1**, **10** e **2**.

Temos então seguinte a tabela:

x	y = log x
0,001	y = log 0,001 = -3
0,01	y = log 0,01 = -2
0,1	y = log 0,1 = -1
1	y = log 1 = 0
10	y = log 10 = 1



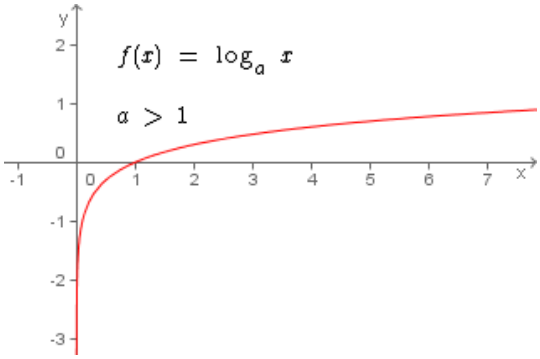
Ao lado temos o gráfico desta **função logarítmica**, no qual localizamos cada um dos pontos obtidos da tabela e os interligamos através da curva da função:Veja que para valores de **y < 0,01** os pontos estão quase sobre o **eixo das ordenadas**, mas de fato nunca chegam a estar.Note também que neste tipo de função uma grande variação no valor de **x** implica numa variação bem inferior no valor de **y**.Por exemplo, se passarmos de **x = 100** para **x = 1000000**, a variação de **y** será apenas de **2** para **6**.Isto porque:

$$\begin{cases} f(100) = \log 100 = 2 \\ f(1000000) = \log 1000000 = 6 \end{cases}$$

Função Crescente e Decrescente

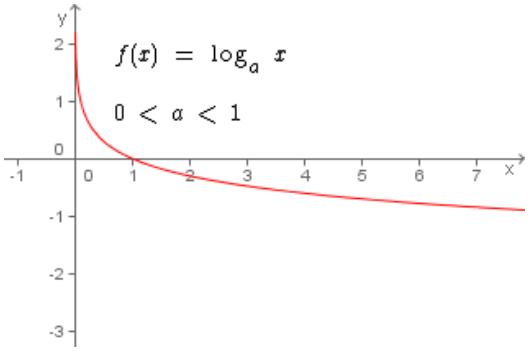
Assim como no caso das funções exponenciais, as **funções logarítmicas** também podem ser classificadas como **função crescente** ou **função decrescente**.Isto se dará em função da base **a** ser maior ou menor que **1**. Lembre-se que segundo a definição da **função logarítmica** $f:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_a x$, temos que $a > 0$ e $a \neq 1$.

Função Logarítmica Crescente



Se $a > 1$ temos uma **função logarítmica crescente**, qualquer que seja o valor real positivo de **x**.No gráfico da função ao lado podemos observar que à medida que **x** aumenta, também aumenta **f(x)**ou **y**. Graficamente vemos que a curva da função é **crescente**.Também podemos observar através do gráfico, que para dois valor de **x** (**x_1** e **x_2**), que $\log_a x_2 > \log_a x_1 \Leftrightarrow x_2 > x_1$, isto para **$x_1$**, **$x_2$** e **a** números reais positivos, com **a > 1**.

Função Logarítmica Decrescente



Se $0 < a < 1$ temos uma **função logarítmica decrescente** em todo o domínio da função.Neste outro gráfico podemos observar que à medida que **x**aumenta,**y** diminui. Graficamente observamos que a curva da função é **decrescente**.No gráfico também observamos que para dois valores de **x** (**x_1** e **x_2**), que $\log_a x_2 < \log_a x_1 \Leftrightarrow x_2 > x_1$, isto para **$x_1$**, **$x_2$** e **a** números reais positivos, com **0 < a < 1**.É importante frisar que independentemente de a função ser crescente ou decrescente, o gráfico da função sempre cruza o eixo das abscissas no ponto **(1, 0)**, além de nunca cruzar o **eixo das ordenadas** e que o $\log_a x_2 = \log_a x_1 \Leftrightarrow x_2 = x_1$, isto para **$x_1$**, **$x_2$** e **a** números reais positivos, com **a ≠ 1**.

Função Exponencial

Uma função é uma maneira de associar a cada valor do argumento x um único valor da função f(x). Isto pode ser feito especificando através de uma fórmula um relacionamento gráfico entre diagramas representando os dois conjuntos, e/ou uma regra de associação, mesmo uma tabela de correspondência pode ser construída; entre conjuntos numéricos é comum representarmos funções por seus gráficos, cada par de elementos relacionados pela função determina um ponto nesta representação, a restrição de unicidade da imagem implica em um único ponto da função em cada linha de chamada do valor independente x.

Como um termo matemático, "função" foi introduzido por Leibniz em 1694, para descrever quantidades relacionadas a uma curva; tais como a inclinação da curva ou um ponto específico da dita curva. Funções relacionadas à curvas são atualmente chamadas funções diferenciáveis e são ainda o tipo de funções mais encontrado por não-matemáticos. Para este tipo de funções, pode-se falar em limites e derivadas; ambos sendo medida da mudança nos valores de saída associados à variação dos valores de entrada, formando a base do cálculo infinitesimal.

A palavra função foi posteriormente usada por Euler em meados do século XVIII para descrever uma expressão envolvendo vários argumentos; i.e:y = F(x). Ampliando a definição de funções, os matemáticos foram capazes de estudar "estranhos" objetos matemáticos tais como funções que não são diferenciáveis em qualquer de seus pontos. Tais funções, inicialmente tidas como puramente imaginárias e chamadas genericamente de "monstros", foram já no final do século XX, identificadas como importantes para a construção de modelos físicos de fenômenos tais como o movimento Browniano.

Durante o Século XIX, os matemáticos começaram a formalizar todos os diferentes ramos da matemática. Weierstrass defendia que se construisse o cálculo infinitesimal sobre a Aritmética ao invés de sobre a Geometria, o que favorecia a definição de Euler em relação à de Leibniz (veja aritmetização da análise). Mais para o final do século, os matemáticos começaram a tentar formalizar toda a Matemática usando Teoria dos conjuntos, e eles conseguiram obter definições de todos os objetos matemáticos em termos do conceito de conjunto. Foi Dirichlet quem criou a definição "formal" de função moderna.

Função Exponencial

Conta a lenda que um rei solicitou aos seus súditos que lhe inventassem um novo jogo, a fim de diminuir o seu tédio. O melhor jogo teria direito a realizar qualquer desejo. Um dos seus súditos inventou, então, o jogo de xadrez. O Rei ficou maravilhado com o jogo e viu-se obrigado a cumprir a sua promessa. Chamou, então, o inventor do jogo e disse que ele poderia pedir o que desejasse. O astuto inventor pediu então que as 64 casas do tabuleiro do jogo de xadrez fossem preenchidas com moedas de ouro, seguindo a seguinte condição: na primeira casa seria colocada uma moeda e em cada casa seguinte seria colocado o dobro de moedas que havia na casa anterior. O Rei considerou o pedido fácil de ser atendido e ordenou que providenciassem o pagamento. Tal foi sua surpresa quando os tesoureiros do reino lhe apresentaram a suposta conta, pois apenas na última casa o total de moedas era de 263, o que corresponde a aproximadamente 9 223 300 000 000 000 000 = 9,2233.1018. Não se pode esquecer ainda que o valor entregue ao inventor seria a soma de todas as moedas contidas em todas as casas. O rei estava falido!

A lenda nos apresenta uma aplicação de funções exponenciais, especialmente da função $y = x^2$.

As funções exponenciais são aquelas que crescem ou decrescem muito rapidamente. Elas desempenham papéis fundamentais na Matemática e nas ciências envolvidas com ela, como: Física, Química, Engenharia, Astronomia, Economia, Biologia, Psicologia e outras.

Definição

A função exponencial é a definida como sendo a inversa da função logarítmica natural, isto é:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

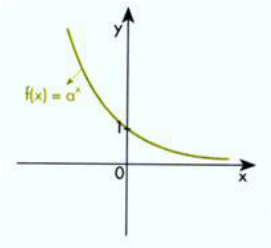
Podemos concluir, então, que a função exponencial é definida por:

$$y = a^x, \ com \ 1 \neq a > 0$$

Gráficos da Função Exponencial

Função exponencial
0 < a < 1

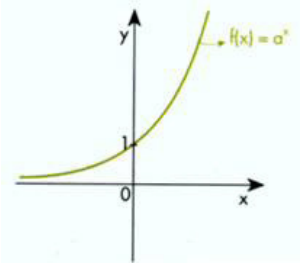
$f: IR \longrightarrow IR$
$x \longrightarrow a^x$



- Domínio = IR
- Contradomínio = IR^+
- f é injectiva
- $f(x) > 0$, $\forall$ x ∈ IR
- f é continua e diferenciável em IR
- A função é estritamente decrescente.
- $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$
- y = 0 é assimptota horizontal

Função exponencial
a> 1

$f: IR \longrightarrow IR$
$x \longrightarrow a^x$



- Domínio = IR
- Contradomínio = IR^+
- f é injectiva
- $f(x) > 0$, $\forall$ x ∈ IR
- f é continua e diferenciável em IR
- A função é estritamente crescente.
- $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$
- y = 0 é assimptota horizontal

Propriedades da Função Exponencial

Se a, x e y são dois números reais quaisquer e k é um número racional, então:

- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $a^x / a^y = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{x.y}$
- $(a\ b)^x = a^x b^x$
- $(a / b)^x = a^x / b^x$
- $a^{-x} = 1 / a^x$

Estas relações também são válidas para exponenciais de base e (e = número de Euller = 2,718...)

- $y = e^x$ se, e somente se, $x = \ln(y)$
- $\ln(e^x) = x$
- $e^{x+y} = e^x.e^y$
- $e^{x-y} = e^x/e^y$
- $e^{x.k} = (e^x)^k$

A Constante de Euler

Existe uma importantíssima constante matemática definida por

e = exp(1)

O número "e" é um número irracional e positivo e em função da definição da função exponencial, temos que:

Ln(e) = 1

Este número é denotado por "e" em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), um dos primeiros a estudar as propriedades desse número.

O valor deste número expresso com 40 dígitos decimais, é:

e = 2,7182818284590452353602874713526624977 57

Se x é um número real, a função exponencial exp(.) pode ser escrita como a potência de base e com expoente x, isto é:

$e^x = \exp(x)$

Exercícios resolvidos

QUESTÃO 01

Resolver a equação exponencial $7^x - 8^{-1}.7^x = 8^x$.

QUESTÃO 02

As soluções reais da inequação $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_5(x+3)} > 1$ são todos os números tais que:

a) $-3 < x < -2$
b) $x > -3$
c) $x > -2$
d) $x < -2$
e) $0 < x < 3$

QUESTÃO 03

A solução da equação logarítmica $2.\log_5 x = \log_5 x + \log_5 8$ é:

a) 0
b) 8
c) 0 e 8
d) – 8
e) 0 e – 8

QUESTÃO 04

O número de indivíduos de um certo grupo é dado por $f(x) = \left(10 - \frac{1}{10^x}\right).1000$, sendo x o tempo medido em dias. Desse modo, entre o 2º e o 3º dia, o número de indivíduos do grupo:

a) Aumentará em exatamente 10 unidades.
b) Aumentará em exatamente 90 unidades.
c) Diminuirá em exatamente 9 unidades.
d) Aumentará em exatamente 9 unidades.
e) Diminuirá em exatamente 90 unidades.

QUESTÃO 05

O preço de um imóvel varia, em R$, no decorrer do tempo, obedecendo a equação: $T = 15.000.\left(\frac{4}{5}\right)^t$. Após quanto tempo o imóvel valerá R$ 10.000,00?

a) t = log(5/6)
b) t = - log(2/15)
c) t = log(2/3)/log(4/5)
d) t = log(4/5)/log(2/3)
e) t = - log(4/5)/log(2/3)

Resoluções

01- Resposta: x = - 1
Solução:
$7^x - 8^{-1}.7^x = 8^x$
$7^x - \ = 8^x$ (colocando 7^x em evidência)

$7^x - 8^{-1}.7^x = 8^x$

$7^x - \frac{7^x}{8} = 8^x$ (colocando 7^x em evidência)

$7^x.\left(1 - \frac{1}{8}\right) = 8^x$

$\frac{7}{8}.7^x = 8^x$

$\frac{7^x}{8^x} = \frac{8}{7}$

$\left(\frac{7}{8}\right)^x = \left(\frac{7}{8}\right)^{-1}$ ➔ x = - 1

02- **Resposta a**
Solução: primeiro temos a condição de existência de logaritmo, o logaritmando tem que ser maior que zero.

$x + 3 > 0$

$x > -3$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_5(x+3)} > 1$

$\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)}^{\log_5(x+3)} > \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)}^{0}$ (cancelamos a base 1/2 que é menor que um, invertemos o sinal da inequação).

$\log_5(x+3) < 0$

$\cancel{\log_5}(x+3) < \cancel{\log_5} 1$

$x + 3 < 1$

$x < 1 - 3$

$x < -2$

Então, da condição de existência: - 3 < x < - 2

03- **Resposta b**
Solução: pela condição de existência de logaritmos temos que x > 0.

$2.\log_5 x = \log_5 x + \log_5 8$

$\cancel{\log_5} x^2 = \cancel{\log_5} x.8$

$x^2 = 8x$

$x^2 - 8x = 0$

$x.(x - 8) = 0$

x = 0 ou x – 8 = 0 ➔ x = 8, a única solução é 8, pois, x > 0 pela condição de existência.

04- **Resposta d**
Solução: basta substituir o x por 2 e 3 na função exponencial dada.

$f(2) = \left(10 - \frac{1}{10^2}\right).1000 = (10 - 0{,}01).1000 = 9{,}99.1000 = 9.990$

$f(3) = \left(10 - \frac{1}{10^3}\right).1000 = (10 - 0{,}001).1000 = 9{,}999.1000 = 9.999$

05- **Resposta c**
Solução: queremos calcular o valor de t quando T = 10.000.
T = 10.000

$T = 10.000$

$15.000.\left(\frac{4}{5}\right)^t = 10.000$

$\left(\frac{4}{5}\right)^t = \frac{10.000}{15.000}$

$\left(\frac{4}{5}\right)^t = \frac{10}{15}$

$\left(\frac{4}{5}\right)^t = \frac{2}{3}$ (a solução agora é colocar logaritmo nos dois membros da equação).

$\log\left(\frac{4}{5}\right)^t = \log\left(\frac{2}{3}\right)$

$t.\log\left(\frac{4}{5}\right) = \log\left(\frac{2}{3}\right)$

$t = \log(2/3)/\log(4/5)$

GRUPO NOVA

Sistema Linear

O estudo dos sistemas de equações lineares é de fundamental importância em Matemática e nas ciências em geral. Você provavelmente já resolveu sistemas do primeiro grau, mais precisamente aqueles com duas equações e duas incógnitas.

Vamos ampliar esse conhecimento desenvolvendo métodos que permitam resolver, quando possível, sistemas de equações do primeiro grau com qualquer número de equações e incógnitas. Esses métodos nos permitirão não só resolver sistemas, mas também classificá-los quanto ao número de soluções.

Equações Lineares

Equação linear é toda equação do tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... a_nx_n = b$, onde $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ e b são números reais e $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ são as incógnitas.

Os números reais $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ são chamados de coeficientes e b é o termo independente.

Exemplos

- São equações lineares:

$x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 3$
$2x - y\ 2z = 1$
$0x + 0y + 0z = 2$
$0x + 0y + 0z = 0$

- Não são equações lineares:

$x^3 - 2y + z = 3$
(x^3 é o impedimento)

$2x_1 - 3x_1x_2 + x_3 = -1$
($-3x_1x_2$ é o impedimento)

$2x_1 - 3\dfrac{3}{x_2} + x_3 = 0$

($\dfrac{3}{x_2}$ é o impedimento)

Observação: Uma equação é linear quando os expoentes das incógnitas forem iguais a l e em cada termo da equação existir uma única incógnita.

Solução de uma Equação Linear

Uma solução de uma equação linear $a_1x_l + a_2x_2 + a_3x_3 + ... a_nx_n = b$, é um conjunto ordenado de números reais $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ para o qual a sentença $a_1\{a_1) + a_2\{aa_2) + a_3(a_3) + ... + a_n(a_n) = b$ é verdadeira.

Exemplos

- A terna (2, 3, 1) é solução da equação:
$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1$ pois:
$(2) - 2.((3) + 3.(1) = -1$

- A quadra (5, 2, 7, 4) é solução da equação:
$0x_1 - 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$ pois:
$0.(5) + 0.(2) + 0.(7) + 0.(4) = 0$

Conjunto Solução

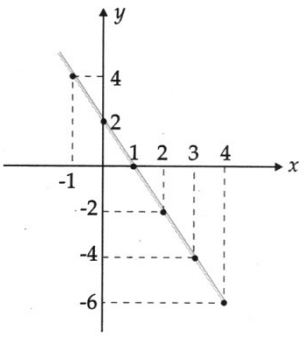
Chamamos de conjunto solução de uma equação linear o conjunto formado por todas as suas soluções.

Observação: Em uma equação linear com 2 incógnitas, o conjunto solução pode ser representado graficamente pelos pontos de uma reta do plano cartesiano.

Assim, por exemplo, na equação
$2x + y = 2$

Algumas soluções são (1, 0), (2, -2), (3, -4), (4, -6), (0, 2), (-1,4), etc.

Representando todos os pares ordenados que são soluções da equação dada, temos:



Equação Linear Homogênea

Uma equação linear é chamada homogênea quando o seu termo independente for nulo.

Exemplo

$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 - x_5 = 0$

Observação: Toda equação homogênea admite como solução o conjunto ordenado de "zeros" que chamamos solução nula ou solução trivial.

Exemplo

(0, 0, 0) é solução de $3x + y - z - 0$

Equações Lineares Especiais

Dada a equação:
$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... a_nx_n = b$, temos:
- Se $a_1 = a_2 = a_3 = ... = na = b = 0$, ficamos com:
$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + ... + 0x_n$, e, neste caso, qualquer seqüências $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ será solução da equação dada.
- Se $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n = 0$ e $b \neq 0$, ficamos com:
$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + ... + 0x_n = b \neq 0$, e, neste caso, não existe seqüências de reais $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ que seja solução da equação dada.

Sistema Linear 2 x 2

Chamamos de sistema linear 2 x 2 o conjunto de equações lineares a duas incógnitas, consideradas simultaneamente.
Todo sistema linear 2 x 2 admite a forma geral abaixo:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2 + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Um par (a_1, a_2) é solução do sistema linear 2 x 2 se, e somente se, for solução das duas equações do sistema.

Exemplo

(3, 4) é solução do sistema

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$$

pois é solução de suas 2 equações:
(3) - (4) = -1 e 2.(3) + (4) = 10

Resolução de um Sistema 2 x 2

Resolver um sistema linear 2 x 2 significa obter o conjunto solução do sistema.
Os dois métodos mais utilizados para a resolução de um sistema linear 2x2 são o método da substituição e o método da adi**ção.**
Para exemplificar, vamos resolver o sistema 2 x 2 abaixo usando os dois métodos citados.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

1. Método da Substituição:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 & (I) \\ x - y = -1 & (II) \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos x = y -1, que substituímos na equação (I)
2(y- 1) +3y = 8 → 5y = 10 → y = 2

Fazendo y = 2 na equação (I), por exemplo, obtemos:
Assim: S = {(1,2)}

2. Método da Adição:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 & (I) \\ x - y = -1 & (II) \end{cases}$$

Multiplicamos a equação II por 3 e a adicionamos, membro a membro, com a equação I.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x - 3y = -3 \\ \hline 5x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{5} = 1 \end{cases}$$

Fazendo x = 1 na equação (I), por exemplo, obtemos:
Assim: S = {(1,2)}

Sistema Linear 2 x 2 com infinitas soluções

Quando uma equação de um sistema linear 2 x 2 puder ser obtida multiplicando-se a outra por um número real, ao tentarmos resolver esse sistema, chegamos numa igualdade que é sempre verdadeira, independente das incógnitas. Nesse caso, existem infinitos pares ordenados que são soluções do sistema.

Exemplo

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 (I) \\ -4x - 6y = -16 (II) \end{cases}$$

Note que se multiplicando a equação (I) por (-2) obtemos a equação (II).
Resolvendo o sistema pelo método da substituição temos:
Da equação (I), obtemos $y = \frac{8 - 2x}{3}$, que substituímos na equação (II).

GRUPO NOVA

$-4x-\cancel{6}\cdot\left(\frac{8-2x}{\cancel{3}}\right)=-16 \rightarrow -4x-2(8-2x)=-16$

$-4x-16+4x=-16 \rightarrow -16=-16$

- 16= -16 é uma igualdade verdadeira e existem infinitos pares ordenados que sejam soluções do sistema.

Entre outros, (1, 2), (4, 0), $\left(\frac{5}{2},1\right)$ e $\left(0,\frac{8}{3}\right)$ são soluções do sistema.

Sendo , um número real qualquer, dizemos que $\left(\alpha,\frac{8-2\alpha}{3}\right)$ é solução do sistema.

(Obtemos $\frac{8-2\alpha}{3}$ substituindo x =a na equação (I)).

Sistema Linear 2 x 2 com nenhuma solução

Quando duas equações lineares têm os mesmos coeficientes, porém os termos independentes são diferentes, dizemos que não existe solução comum para as duas equações, pois substituindo uma na outra, obtemos uma igualdade sempre falsa.

Exemplo

2x + 3y = 6 (I) e 2x + 3y = 5 (II)

Substituindo 2x + 3y da equação (I) na equação (II) obtemos:

6 = 5 que é uma igualdade falsa. Se num sistema 2 x 2 existir um número real que, multiplicado por uma das equações, resulta uma equação com os mesmos coeficientes da outra equação do sistema, porém com termos independentes diferentes, dizemos que não existe par ordenado que seja solução do sistema.

Exemplo

$$\begin{cases} x+2y=5(I) \\ 2x+4y=7(I\ ) \end{cases}$$

Multiplicando-se equação (I) por 2 obtemos:

2x + 4y = 10

Que tem os mesmo coeficientes da equação (II), porém os termos independentes são diferentes.

Se tentarmos resolver o sistema dado pelo método de substituição, obtemos uma igualdade que é sempre falsa, independente das incógnitas.

$$\begin{cases} x+2y=5(I) \\ 2x+4y=7(I\ ) \end{cases}$$

Da equação (I), obtemos $\left(y=\frac{5-x}{2}\right)$, que substituímos na equação (II)

$2x-\cancel{4}\cdot\left(\frac{5-x}{\cancel{2}}\right)=7 \rightarrow 2x+2(5-x)=7$

$2x+10-2x=7 \rightarrow 10=7$

10 = 7 é uma igualdade falsa e não existe par ordenado que seja solução do sistema.

Classificação

De acordo com o número de soluções, um sistema linear 2 x 2 pode ser classificado em:

- Sistemas Impossíveis ou Incompatíveis: são os sistemas que não possuem solução alguma.
- Sistemas Possíveis ou compatíveis: são os sistemas que apresentam pelo menos uma solução.
- Sistemas Possíveis Determinados: se possuem uma única solução.
- Sistemas Possíveis Indeterminados: se possuem infinitas soluções.

Sistema Linear m x n

Chamamos de sistema linear M x n ao conjunto de m equações a n incógnitas, consideradas simultaneamente, que podem ser escrito na forma:

$$\begin{cases} a_1\ x_1+a_2\ x_2+a_3\ x_3+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_2\ x_1+a_2\ x_2+a_3\ x_3+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ a_3\ x_1+a_3\ x_2+a_3\ x_3+\ldots+a_{3n}x_n=b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\ldots+a_m\ x_n=b_m \end{cases}$$

Onde:

$X_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as incógnitas;

a_{ij}, com $1 \le i \le m$ e $1 \le n$, são os coeficientes das incógnitas; b_i, com $1 \le i \le m$, são os termos independentes.

Exemplos

1. $\begin{cases} x-2y+3z=5 \\ x+y-z+2 \end{cases}$

(sistema 2 x 3)

2. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$

(sistema 3 x 4)

3. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - y = 4 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$

(sistema 3 x 2)

Matriz Incompleta

Chamamos de matriz incompleta do sistema linear a matriz formada pelos coeficientes das incógnitas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo

No sistema:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + \quad z = 0 \\ -x + y \quad = 5 \end{cases}$$

A matriz incompleta é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Forma Matricial

Consideremos o sistema linear M x n:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sendo A a Matriz incompleta do sistema chamamos, respectivamente, as matrizes:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

De matriz incógnita e matriz termos independentes.

E dizemos que a forma matricial do sistema é A . X = B, ou seja:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares – Escalonamento (I)

Resolução de um Sistema por Substituição

Resolvemos um sistema linear *m* x *n* por substituição, do mesmo modo que fazemos num sistema linear 2 x 2. Assim, observemos os exemplos a seguir.

Exemplos

- Resolver o sistema pelo método da substituição.

$$\begin{cases} x+2y-z=-1 & (I) \\ 2x-y+z=5 & (I\ ) \\ x+3y-2z=-4 & (III) \end{cases}$$

Resolução

Isolando a incógnita x na equação (I) e substituindo nas equações (II) e (III), temos:
x + 2y – z - 1→ x = -2y + z - 1

Na equação (II)
2(-2y + z - 1) – y + z = 5 → -5y + 3z = 7 (IV)

Na equação (III)
(-2y + z - 1) + 3y - 2z = -4 → y – z = -3 (V)

Tomando agora o sistema formado pelas equações (IV) e (V):

$$\begin{cases} -5y+3z=7 & (IV) \\ y-z=-3 & (V) \end{cases}$$

Isolando a incógnita y na equação (V) e substituindo na equação (IV), temos:
y – z = -3 → y = z - 3
-5 (z - 3) + 3z = 7→ z = 4

Substituindo z = 4 na equação (V)
y – 4 = -3 → y = 1

Substituindo y = 1 e z = 4 na equação (I)
x + 2 (1) - (4) = -1 →x = 1

Assim:

S={(1, 1, 4)}

- Resolver o sistema pelo método da substituição:

$$\begin{cases} x+3y-z=1 & (I) \\ y+2z=10 & (II) \\ 3z=12 & (III) \end{cases}$$

Resolução

Isolando a incógnita x na equação (I) e substituindo nas equações (II) e (III), temos:
x + 2y – z = -1 → x = -2y + z - 1

Na equação (II)
2(-2y + z - 1) – y + z = 5 →5y + 3z = 7 (IV)

Na equação (III)
(-2y + z - 1) + 3y - 2z = -4 → y – z = -3 (V)

Tomando agora o sistema formado pelas equações (IV) e (V):

$$\begin{cases} -5y+3z=7 & (IV) \\ y-z=-3 & (V) \end{cases}$$

Isolando a incógnita y na equação (V) e substituindo na equação (IV), temos:
y – z = -3 → y = z - 3
-5(z - 3) + 3z = 7 → z = 4

Substituindo z = 4 na equação (V)
y – 4 = -3 → y = 1

Substituindo y = 1 e z = 4 na equação (I)
x + 2(1) - (4) = -1 → x = 1

Assim:
S={(1, 1, 4)}

2º) Resolver o sistema pelo método da substituição:

$$\begin{cases} x+3y-z=1 & (I) \\ y+2z=10 & (II) \\ 3z=12 & (III) \end{cases}$$

Resolução

Na equação (III), obtemos:
3z = 12 → z = 4

Substituindo z = 4 na equação (II), obtemos:
y + 2 . 4 = 10 → y = 2

Substituindo z = 4 e y = 2 na equação (I), obtemos:
x + 3 . 2 – 4 = 1 → x = -1

Assim:
S{(-1, 2, 4)}

Observação: Podemos observar que a resolução de sistemas pelo método da substituição pode ser demasiadamente longa e trabalhosa, quando os sistemas não apresentam alguma forma simplificada como no primeiro exemplo. No entanto, quando o sistema apresenta a forma simples do segundo exemplo, que denominamos "forma escalonada", a resolução pelo método da substituição é rápida e fácil.

Veremos, a seguir, como transformar um sistema linear *m* x *n* qualquer em um sistema equivalente na "forma escalonada".

Sistemas Lineares Escalonados

Dizemos que um sistema linear é um **sistema escalonado** quando:

- Em cada equação existe pelo menos um coeficiente não-nulo;
- O número de coeficiente nulos, antes do primeiro coeficiente não-nulo, cresce "da esquerda para a direita, de equação para equação".

Exemplos

1. $\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 2y + 3z = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 2z = 3 \\ z = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y + z + t = 5 \\ y - t = 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_4 = 5 \end{cases}$

Existem dois tipos de sistemas escalonados:

Tipo: Número de equações igual ao número de incógnitas.

$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_2 x_2 + a_3 x_3 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ a_3 x_3 + \cdots + a_{3n} x_n = b_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n x_n = b_n \end{cases}$$

Notamos que os sistemas deste tipo podem ser analisados pelo método de Cramer, pois são sistemas *n* x *n*. Assim, sendo *D* o determinante da matriz dos coeficientes (incompleta), temos:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots a_{1n} \\ 0 & a_2 & a_3 & \cdots a_{2n} \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots a_n \end{vmatrix} = D = a_1 . a_2 . a_3 . \cdots . a_n \neq 0$$

Como $D \neq 0$, os sistemas deste tipo são possíveis e determinados e, para obtermos a solução única, partimos da n-ésima equação que nos dá o valor de x_n; por substituição nas equações anteriores, obtemos sucessivamente os valores de x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_3, x_2 e x_1.

Exemplo

Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - z + t = 5 (I) \\ y + z + 3t = 9 (I\ ) \\ 2z - t = 0 (III) \\ 3t = 6 (V\ ) \end{cases}$$

Resolução

Na equação (IV), temos:
$3t = 6 \rightarrow t = 2$

Substituindo $t = 2$ na equação (III), temos:
$2z - 2 = 0 \rightarrow z = 1$

Substituindo $t = 2$ e $z = 1$ na equação (II), temos:
$y + 1 + 3 . 2 = 9 \rightarrow y = 2$

Substituindo $t = 2$, $z = 1$ e $y = 2$, na equação (I), temos:
$2x + 2 - 1 + 2 = 5 \rightarrow x = 1$

Assim:
S {(1, 2, 1, 2)}

Tipo: Número de equações menor que o número de incógnitas.

Para resolvermos os sistemas lineares deste tipo, devemos transformá-los em sistemas do 1° tipo, do seguinte modo:

- As incógnitas que não aparecem no inicio de nenhuma das equações do sistema, chamadas variáveis livres, devem ser "passadas" para os segundos membros das equações. Obtemos, assim, um sistema em que consideramos incógnitas apenas as equações que "sobraram" nos primeiros membros.
- Atribuímos às variáveis livres valores literais, na verdade "valores variáveis", e resolvemos o sistema por substituição.

Exemplo

Resolver o sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2y - z = 2 \end{cases}$$

Resolução

A variável z é uma "*variável livre*" no sistema.

Então:

$$\begin{cases} x + y = 1 - 2z \\ 2y = 2 + z \end{cases}$$

Fazendo z = a, temos:

$$\begin{cases} x + y = 1 - 2\alpha \\ 2y = 2 + \alpha \end{cases}$$

$2y = 2 + a \rightarrow y = \dfrac{2+\alpha}{2}$

Substituindo $y = \dfrac{2+\alpha}{2}$ na 1ª equação, temos:

$$x + \frac{2+\alpha}{2} = 1 - 2\alpha$$

Agora para continuar fazemos o mmc de 2, e teremos:

$$2x + 2\alpha = 2(1 - 2\alpha)$$
$$2x + 2\alpha = 2 - 4\alpha$$
$$4\alpha + 2x + 2 + \alpha - 2 = 0$$
$$5\alpha + 2x = 0$$
$$2x = -5\alpha)$$

$$x = \frac{-5\alpha}{2}$$

Assim:

$$S = \left\{ \left(\frac{5\alpha}{2}, \frac{2+\alpha}{2}, \alpha \right), \alpha \in R \right\}$$

Observações: Para cada valor real atribuído a a, encontramos uma solução do sistema, o que permite concluir que o sistema é possível e indeterminado.

- A quantidade de variáveis livres que um sistema apresenta é chamada de grau de liberdade ou grau de indeterminação do sistema.

Sistemas Lineares – Escalonamento (II)

Escalonamento de um Sistema

Todo sistema linear possível pode ser transformado num sistema linear escalonado equivalente, através das transformações elementares a seguir:

- Trocar a ordem em que as equações aparecem no sistema.

Exemplo

$$(S) = \begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \sim (S_1) \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

Inverter a ordem em que as incógnitas aparecem nas equações.

Exemplo

$$(S)=\begin{cases} x+2y+z=5 \\ x+2z=1 \\ 3x=5 \end{cases} \sim (S_1)\begin{cases} 2y+z+x=5 \\ 2z+x=1 \\ 3x=5 \end{cases}$$

- Multiplicar (ou dividir) uma equação por um número real não-nulo.

Exemplo

$$(S)\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x-y=1 \end{cases} \sim (S_1)\begin{cases} x+2y=3 \\ 6x-2y=3 \end{cases}$$

Multiplicamos a 2ª equação de *S* por 2, para obtermos S_1.

- Adicionar a uma equação outra equação do sistema, previamente multiplicada por um número real não-nulo.

Exemplo

$$(S)=\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x+y=3 \end{cases} \sim (S_1)\begin{cases} x+3y=5 \\ -5y=-7 \end{cases}$$

Multiplicamos a 1ª equação do *S* por -2 e a adicionamos à 2ª equação para obtermos s_1.

Para transformarmos um sistema linear (*S*) em outro, equivalente e escalonado (S_1), seguimos os seguintes passos:

- Usando os recursos das três primeiras transformações elementares, devemos obter um sistema em que a 1ª equação tem a 1ª incógnita com o coeficiente igual a 1.
- Usando a quarta transformação elementar, devemos "zerar" todos os coeficientes da 1ª incógnita em todas as equações restantes.
- "Abandonamos"a 1ª equação e repetimos os dois primeiros passos com as equações restantes, e assim por diante, até a penúltima equação do sistema.

Exemplos

- Escalonar e classificar o sistema:

$$\begin{cases} 2x+y+z=5 \\ 3x-y2z=-2 \\ x+2y-z=1 \end{cases}$$

Resolução

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 3x-y-2z=-2 \\ 2x+y+z=5 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=1 \\ 3x-y-2z=-2 & \leftarrow -3 \\ 2x+y+z=5 & \leftarrow -2 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=1 \\ -7y+z=-5 \\ -3y+3z=3: & -3 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x+2y-z=-1 \\ -7y+z=5 \\ y-z=-1 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=1 \\ y-z=-1 \\ -7y+z=-5 & \leftarrow 7 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=1 \\ y-z=-1 \\ -6z=-12 \end{cases}$$

O sistema obtido está escalonado e é do 1º tipo (nº de equações igual ao nº de incógnitas), portanto, é um sistema possível e determinado.

- Escalonar e classificar o sistema:

$$\begin{cases} 3x+y-z=3 \\ 2x-y+3z=5 \\ 8x+y+z=1 \end{cases}$$

Resolução

$$\begin{cases} 3x+y-z=3 \\ 2x-y+3z=5 \\ 8x+y+z=11 \end{cases} \sim \begin{cases} y+3x-z=3 \\ -y+2x+3z=5 & \leftarrow 1 \\ y+8x+z=11 & \leftarrow -1 \end{cases} \sim \begin{cases} y+3x-z=3 \\ 5x+2z=8 \\ 5x+2z=8(*) \end{cases} \sim \begin{cases} y+3x-z=3 \\ 5x+2z=8 \end{cases}$$

O sistema obtido está escalonado e é do 2º tipo (nº de equações menor que o nº de incógnitas), portanto, é um sistema possível e indeterminado.

(*) A terceira equação foi eliminada do sistema, visto que ela é equivalente à segunda equação. Se nós não tivéssemos percebido essa equivalência, no passo seguinte obteríamos na terceira equação: 0x + 0z = 0, que é uma equação satisfeita para todos os valores reais de x e z.

- Escalonar e classificar o sistema:

$$\begin{cases} 2x+5y+z=5 \\ x+2y-z=3 \\ 4x+9y-z=8 \end{cases}$$

Resolução

$$\begin{cases} 2x+5y+z=5 \\ x+2y-z=3 \\ 4x+9y-z=8 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x+5y+z=5 & \leftarrow -2 \\ 4x+9y-z=8 & \leftarrow -4 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=3 \\ y+3z=-1 \\ y+3z=-4 & \leftarrow -1 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x+2y-z=3 \\ y+3z=-1 \\ 0y+0z=-3 & \leftarrow -1 \end{cases}$$

O sistema obtido é impossível, pois a terceira equação nunca será verificada para valores reais de *y* e *z*.

Observação: Dado um sistema linear, sempre podemos "tentar" o seu escalonamento. Caso ele seja impossível, isto ficará evidente pela presença de uma equação que não é satisfeita por valores reais (exemplo: $0x + 0y = 3$). No entanto, se o sistema é possível, nós sempre conseguimos um sistema escalonado equivalente, que terá nº de equações igual ao nº de incógnitas (possível e determinado), ou então o nº de equações será menor que o nº de incógnitas (possível e indeterminado).

Este tratamento dado a um sistema linear para a sua resolução é chamado de método de eliminação de Gauss.

Sistemas Lineares – Discussão (I)

Discutir um sistema linear é determinar; quando ele é:

- Possível e determinado (solução única);
- Possível e indeterminado (infinitas soluções);
- Impossível (nenhuma solução), em função de um ou mais parâmetros presentes no sistema.

Estudaremos as técnicas de discussão de sistemas com o auxilio de exemplos.

Sistemas com Número de Equações Igual ao Número de Incógnitas

Quando o sistema linear apresenta nº de equações igual ao nº de incógnitas, para discutirmos o sistema, inicialmente calculamos o determinante *D* da matriz dos coeficientes (incompleta), e:

- Se $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado.
- Se $D = 0$, o sistema é possível e indeterminado ou impossível.

Para identificarmos se o sistema é possível, indeterminado ou impossível, devemos conseguir um sistema escalonado equivalente pelo método de eliminação de Gauss.

Exemplos

- Discutir, em função de *a*, o sistema:

$$\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x+ay=1 \end{cases}$$

GRUPO NOVA

Resolução

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a - 6$$

$$D = 0 \Rightarrow a - 6 = 0 \Rightarrow a = 6$$

Assim, para $a \neq 6$, o sistema é possível e determinado.

Para $a \neq 6$, temos:

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + 6y = 1 \quad \leftarrow -2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 0x + 0y = -9 \end{cases}$$

Que é um sistema impossível.
Assim, temos:
$a \neq 6 \rightarrow SPD$ (Sistema possível e determinado)
$a = 6 \rightarrow SI$ (Sistema impossível)

- Discutir, em função de a, o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 8 \\ x - my = 3 \end{cases}$$

Resolução

$$D \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix} = 9 + a - 2a + 3 - 6 - a^2$$

$D = 0 \rightarrow -a^2 - a + 6 = 0 \rightarrow a = -3$ ou $a = 2$

Assim, para $a \neq -3$ e $a \neq 2$, o sistema é possível e determinado.

Para $a = -3$, temos:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y - 3z = 3 \quad \leftarrow -2 \\ x - 3y + 3z = 2 \quad \leftarrow -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y - z = 1 \\ -4y + 4z = 1 \quad \leftarrow 4 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y - z = 1 \\ y + z = 5 \quad sistema \quad impossível \end{cases}$$

Para $a = 2$, temos:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+2z=3 \quad \leftarrow -2 \\ x+2y+3z=2 \quad \leftarrow -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+4z=1 \\ y+4z=1 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+4z=1 \end{cases} \quad \textit{sistema possível indeterminado}$$

Assim, temos:
$a \neq -3$ e $a \neq 2 \rightarrow$ SPD
$a = -3 \rightarrow$ SI
$a = 2 \rightarrow$ SPI

- Discutir, em função de m e k, o sistema:

$$\begin{cases} mx+y=k \\ x+my=k^2 \end{cases}$$

Resolução

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1$$

$D = 0 \rightarrow m^2 - 1 = 0 \rightarrow m = +1$ ou $m = -1$

Assim, para $m \neq +1$ e $m \neq -1$, o sistema é possível e determinado.

Para $m = 1$, temos:

$$\begin{cases} x+y=K \\ x+y=K^2 \quad \leftarrow -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y=K \\ 0x+0y=-K+K^2 \end{cases}$$

Se $-k + k^2 = 0$, ou seja, $k = 0$ ou $k = 1$, o sistema é possível e indeterminado.
Se $-K + k^2 \neq 0$, ou seja, $k \neq 0$ ou $k \neq 1$, o sistema é impossível.

Para $m = -1$, temos:

$$\begin{cases} -x+y=K \\ x-y=k^2 \end{cases} \sim \begin{cases} x-y=K^2 \\ -x+y=K \quad \leftarrow 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x-y=k^2 \\ Ox+Oy=k^2+k \end{cases}$$

Se $k^2 + k = 0$, ou seja, $k = 0$ $k = -1$, o sistema é possível e indeterminado.
Se $k^2 + k \neq 0$, ou seja, $k \neq 0$ $k \neq -1$, o sistema é indeterminado.

Assim, temos:

$$m \neq +1 \quad e \quad m \neq -1, \quad \forall \quad k \in R \Rightarrow SPD$$

$$\left.\begin{array}{l} m = +1 \quad e \quad k = 0 \quad ou \quad k = 1 \\ ou \\ m = -1 \quad e \quad k = 0 \quad ou \quad k = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow SPI$$

$$\left.\begin{array}{l} m = +1 \quad e \quad k \neq 0 \quad ou \quad k \neq 1 \\ ou \\ m = -1 \quad e \quad k \neq 0 \quad ou \quad k \neq -1 \end{array}\right\} \Rightarrow SI$$

Sistemas com Número de Equações Diferente do Número de Incógnitas

Quando o sistema linear apresenta número de equações diferente do número de incógnitas, para discuti-lo, devemos obter um sistema escalonado equivalente pelo método de eliminar de Gauss.

Exemplos

- Discutir, em função de *m*, o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 8 \\ x - my = 3 \end{cases}$$

Resolução

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2z + 3y = 8 \quad \to -2 \quad \sim \\ x - my = 3 \quad \to -1 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x + y = 3 \\ y = 2 \\ (-1 - m)y = 0 \quad \to 1 + m \end{cases} \qquad \sim \begin{cases} x + y = 3 \\ y = 2 \\ 0y = 2 + 2m \end{cases}$$

2 + 2*m* = 0 → *m* = -1
Assim, temos:
m ≠ -1 → SI
m = -1 → SPD

- Discutir, em função de k, o sistema:

$$\begin{cases} x+2y-z=5 \\ 2x+5y+3z=12 \\ 3x+7y-2z=17 \\ 5x+12y+kz=29 \end{cases}$$

Resolução

$$\begin{cases} x+2y-z=5 \\ 2x+5y+3z=12 & \leftarrow -2 \\ 3x+7y-2z=17 & \leftarrow -3 \\ 5x+12y+kz=29 & \leftarrow -5 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=5 \\ y+z=2 \\ y+5z=2 & \leftarrow -1 \\ 2y+(5+K)z=4 & \leftarrow -2 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=5 \\ y+z=2 \\ 4z=0 & \div 4 \\ (3+K)z=0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x+2y-z=5 \\ y+z=2 \\ z=0 & -3-K \\ (3+K)z=0 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=5 \\ y+z=2 \\ z=0 \\ 0z=0 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=5 \\ y+z=2 \\ z=0 \end{cases}$$

Assim, para $\forall k \in R$, o sistema é possível e determinado.

Sistemas Lineares – Discussão (II)

Sistema Linear Homogêneo

Já sabemos que sistema linear homogêneo é todo sistema cujas equações têm todos os termos independentes iguais a zero.

São homogêneos os sistemas:

1. $\begin{cases} 3x+4y=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+2y+2z=0 \\ 3x-y+z=0 \\ 5x+3y-7z=0 \end{cases}$

Observe que a dupla (0, 0) é solução do sistema 01 e a terna (0, 0, 0) é solução do sistema 02.

Todo sistema linear homogêneo admite como solução uma sequência de zero, chamada solução nula ou solução trivial. Observamos também que todo sistema homogênea é sempre possível, podendo, eventualmente, apresentar outra solução além da solução trivial, que é chamada solução própria.

Discussão e Resolução

Lembre-se que: Todo sistema linear homogêneo tem ao menos a solução trivial, portanto será sempre possível.

Vejamos alguns exemplos:

- Classifique e resolva o sistema:

$$\begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x + 5y - z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Resolução

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -12$$

Como $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado admitindo só a solução trivial, logo:

$$S = \{(0,0,0)\}$$

- Classifique e resolva o sistema:

$$\begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ a - 3b - 2c = 0 \\ 2a - b + c = 0 \end{cases}$$

Resolução

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Como $D = 0$, o sistema homogêneo é indeterminado.

Fazendo o escalonamento temos:

$$\begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ a - 3b + -2c = 0 \\ 2a - b + c = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ 0 - 4b - 4c = 0 \\ 0 - 3b - 3c = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ 0 + b + 4c = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

Teremos, então:

$$\begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$$

Fazendo $c = t$, teremos:
$b = -c \rightarrow b = -t$
$a - t + 2t = 0 \rightarrow a = -t$

Portanto:

$$S = \{(-t, -t, t), t \in R\}$$

Note que variando t obteremos várias soluções, inclusive a trivial para $t = 0$.

- Determine K de modo que o sistema abaixo tenha solução diferente da trivial.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - ky + z = 0 \\ kx - y - z = 0 \end{cases}$$

Resolução

O sistema é homogêneo e, para apresentar soluções diferentes da trivial, devemos ter $D = 0$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ k & -1 & -1 \end{vmatrix} = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 = 0 \Rightarrow k = -1$$

k = -1.

Exercícios resolvidos

QUESTÃO 01

Resolver e classificar o sistema:

$$\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 3x-2y=-1 \end{cases}$$

QUESTÃO 02

Determinar *m* real, para que o sistema seja possível e determinado:

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x+my=2 \end{cases}$$

QUESTÃO 03

Resolver e classificar o sistema:

$$\begin{cases} 3x-y+z=5 \\ x+3y=7 \\ 2x+y-2z=-4 \end{cases}$$

QUESTÃO 04

Determinar *m* real para que o sistema seja possível e determinado.

$$\begin{cases} x+2y+z=5 \\ 2x-y+2z=5 \\ 3x+y+mz+0 \end{cases}$$

QUESTÃO 05

Se o terno ordenado (2, 5, p) é solução da equação linear 6x - 7y + 2z = 5, qual o valor de p?

QUESTÃO 06

Escreva a solução genérica para a equação linear 5x - 2y + z = 14, sabendo que o terno ordenado (, ,) é solução.

QUESTÃO 07

Determine o valor de m de modo que o sistema de equações abaixo,

2x - my = 10

3x + 5y = 8, seja impossível.

QUESTÃO 08y

e os sistemas:

S_1: x + y = 1 e S_2: ax – by = 5

X – 2y = -5 ay – bx = -1

São equivalentes, então o valor de $a^2 + b^2$ é igual a:

a) 1
b) 4
c) 5
d) 9
e) 10

QUESTÃO 09

Resolva o seguinte sistema usando a regra de Cramer:

x + 3y - 2z = 3
2x - y + z = 12
4x + 3y - 5z = 6

QUESTÃO 10

Resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x-y=7 \\ x+5y=-2 \end{cases}.$$

Resoluções

1) Resposta "*S*= {(1, 2)}".

Solução: Calculemos inicialmente *D*, D_x e D_y:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=-4-9=-13$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=-16+3=13$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-2-24=-26$$

Como *D* =-13 ≠ 0, o sistema é possível e determinado e:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-13}{-13}=1 \text{ e } y=\frac{D_y}{D}=\frac{-26}{-13}=2$$

Assim: *S*= {(1, 2)} e o sistema são possíveis e determinados.

2) Resposta

"$\left\{m \in R / m \neq \frac{3}{2}\right\}$".

Solução: Segundo a regra de Cramer, devemos ter $D \neq 0$, em que:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{vmatrix} = 2m - 3$$

Assim: $2m - 3 \neq 0 \rightarrow m \neq \frac{3}{2}$

Então, os valores reais de *m*, para que o sistema seja possível e determinado, são dados pelos elementos do conjunto:

$$\left\{m \in R / m \neq \frac{3}{2}\right\}$$

3) Resposta " S = {(1, 2, 4)}".

Solução: Calculemos inicialmente D, D_x, D_y e D_z

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -18 + 0 + 1 - 6 - 0 - 2 = -25$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -30 + 0 + 7 + 12 - 0 - 14 = -25$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -42 + 0 - 4 - 14 - 0 + 10 = -50$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -36 - 14 + 5 - 30 - 21 - 4 = -100$$

Como D= -25 ≠ 0, o sistema é possível e determinado e:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-25}{-25} = 1;$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-50}{-25} = 2;$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{100}{-25} = 4$$

Assim: *S* = {(1, 2, 4)} e o sistema são possíveis e determinados.

4) Resposta

"$\{m \in R / m \neq 3\}$".

Solução: Segundo a regra de Cramer, devemos ter $D \neq 0$.

Assim:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & m \end{vmatrix} = -m + 12 + 2 + 3 - 2 - 4m$$

$D = -5m + 15$

Assim: $-5m + 15 \neq 0 \rightarrow m \neq 3$

Então, os valores reais de *m*, para que o sistema seja possível e determinado, são dados pelos elementos do conjunto:

$$\{m \in R / m \neq 3\}$$

5) Resposta "14".

Solução:
Teremos por simples substituição, observando que x = 2, y = 5 e z = p, 6 . 2 – 7 . 5 + 2 . p = 5.
Logo, 12 - 35 + 2p = 5.
Daí vem imediatamente que 2p = 28 e, portanto, p = 14.

6) Solução:

Podemos escrever: $5a - 2\beta + \gamma = 14$. Daí, tiramos: $\gamma = 14 - 5a + 2\beta$. Portanto, a solução genérica será o terno ordenado $(a, \beta, 14 - 5a + 2\beta)$.

Observe que se arbitrando os valores para a e β, a terceira variável ficará determinada em função desses valores.

Por exemplo, fazendo-se $a = 1$, $\beta = 3$, teremos:

$\gamma = 14 - 5a + 2\beta = 14 - 5 . 1 + 2 . 3 = 15$,

ou seja, o terno (1, 3, 15) é solução, e assim, sucessivamente.

Verificamos, pois que existem infinitas soluções para a equação linear dada, sendo o terno ordenado $(a, \beta, 14 - 5a + 2\beta)$ a solução genérica.

7) Solução:

Teremos, expressando x em função de m, na primeira equação:

$x = (10 + my) / 2$

Substituindo o valor de x na segunda equação, vem:

$3[(10+my) / 2] + 5y = 8$

Multiplicando ambos os membros por 2, desenvolvendo e simplificando, vem:

$3(10+my) + 10y = 16$

$30 + 3my + 10y = 16$

$(3m + 10)y = -14$

$y = -14 / (3m + 10)$

Ora, para que não exista o valor de y e, em consequência não exista o valor de x, deveremos ter o denominador igual a zero, já que , como sabemos, não existe divisão por zero.

Portanto, $3m + 10 = 0$, de onde se conclui $m = -10/3$, para que o sistema seja impossível, ou seja, não possua solução.

8) Resposta "E".

Solução: Como os sistemas são equivalentes, eles possuem a mesma solução. Vamos resolver o sistema:

S_1: $x + y = 1$

$x - 2y = -5$

Subtraindo membro a membro, vem: $x - x + y - (-2y) = 1 - (-5)$.

Logo, $3y = 6 \setminus y = 2$.

Portanto, como $x + y = 1$, vem, substituindo: $x + 2 = 1 \setminus x = -1$.

O conjunto solução é, portanto $S = \{(-1, 2)\}$.

Como os sistemas são equivalentes, a solução acima é também solução do sistema S_2.

Logo, substituindo em S_2 os valores de x e y encontrados para o sistema S_1, vem:

$a(-1) - b(2) = 5 \rightarrow -a - 2b = 5$

$a(2) - b(-1) = -1 \rightarrow 2a + b = -1$

Multiplicando ambos os membros da primeira equação por 2, fica:

$-2a - 4b = 10$

Somando membro a membro esta equação obtida com a segunda equação, fica:

$-3b = 9 \setminus b = -3$

Substituindo o valor encontrado para b na equação em vermelho acima (poderia ser também na outra equação em azul), teremos:

$2a + (-3) = -1 \setminus a = 1$.

Portanto, $a^2 + b^2 = 1^2 + (-3)^2 = 1 + 9 = 10$.

9) Resposta "S = {(5, 2, 4)}".

Solução: Teremos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 24$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 12 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 120$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 12 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 96$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 12 & 1 \\ 4 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 48$$

Portanto, pela regra de Cramer, teremos:

$x_1 = D x_1 / D = 120 / 24 = 5$

$x_2 = D x_2 / D = 48 / 24 = 2$

$x_3 = D x_3 / D = 96 / 24 = 4$

Logo, o conjunto solução do sistema dado é $S = \{(5, 2, 4)\}$.

10) Solução:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow det\ A = 11$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A_1 = 33$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow det\ A_2 = -11$$

$$x = \frac{det\ A_1}{det\ A} = \frac{33}{11} = 3$$

$$y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-11}{11} = -1$$

Resposta:

$$S = \{(3,-1)\}$$

Trigonometria

No triângulo retângulo temos as seguintes definições:

$$sen = \frac{cat.oposto}{hipotenusa}$$

$$\cos = \frac{cat.adjacente}{hipotenusa}$$

$$g = \frac{cat.oposto}{cat.adjacente}$$

Sendo x e y dois ângulos, temos:

I) Se x + y = 90° (ângulos complementares) ➔ $senx = \cos y$

II) Se x + y =180° (ângulos suplementares) ➔ $senx = seny$ e $\cos x = -\cos y$

Relações Fundamentais da Trigonometria:

I) $sen^2 x + \cos^2 x = 1$

II) $tgx = \dfrac{senx}{\cos x}$

III) $\cot gx = \dfrac{\cos x}{senx}$

IV) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

V) $\cos\sec x = \dfrac{1}{senx}$

Fórmulas de Adição e Subtração:

I) Seno da soma: $sen(a+b) = sena.\cos b + senb.\cos a$

II) Seno da diferença: $sen(a-b) = sena.\cos b - senb.\cos a$

III) Cosseno da soma: $\cos(a+b) = \cos a.\cos b - sena.senb$

IV) Cosseno da diferença: $\cos(a-b) = \cos a.\cos b + sena.senb$

V) Tangente da soma: $tg(a+b) = \dfrac{tga + tgb}{1 - tga.tgb}$

VI) Tangente da diferença: $tg(a-b) = \dfrac{tga - tgb}{1 + tga.tgb}$

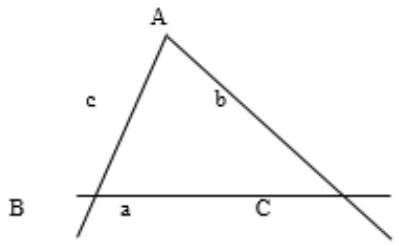
Fórmulas do Arco Duplo:

I) $sen(2a) = 2.sena.\cos a$

II) $\cos(2a) = \cos^2 a - sen^2 a$

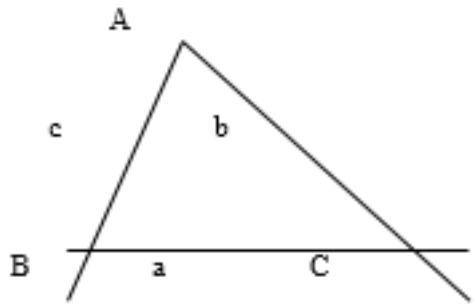
III) $tg(2a) = \dfrac{2.tga}{1 - tg^2 a}$

Lei dos Senos: "em todo triângulo cada lado é proporcional ao seno do ângulo oposto".



$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

Lei dos cossenos: "em todo triângulo um lado ao quadrado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos duas vezes esses dois lados vezes o cosseno do ângulo formado por eles".



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos C$$

Exercícios resolvidos

QUESTÃO 01

(UNESP) Se 0° < x < 90°, então a expressão $\frac{sen^2 x + \cos^2 x}{\cos x}$ é igual a:

a) senx
b) cosx
c) tgx
d) cotgx
e) secx

QUESTÃO 02

(Fuvest) Simplificando a expressão $y = sen17°.\cot g17°.\cot g73°.\sec 73°$, encontramos:

a) – 2
b) – 1
c) 2
d) 1
e) 5

QUESTÃO 03

Calcular sen75°.

QUESTÃO 04

A expressão $\frac{\cos(90°+x)}{sen(90°-x)}$ é equivalente a:

a) tgx
b) cotgx
c) – tgx
d) – cotgx
e) secx

QUESTÃO 05

Sabendo que $sena + \cos a = \frac{1}{2}$, calcular o valor de sen(2a).

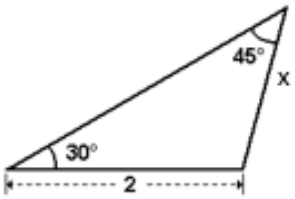
QUESTÃO 03

O valor de 3.sen10°.(tg5° + cotg5°) é igual a:

a) 3/2
b) 2
c) 3
d) 5
e) 6

QUESTÃO 07

Calcular o valor de x no triângulo abaixo:



QUESTÃO 05

(Fuvest) Um triângulo T tem lados iguais a 4, 5 e 6. O valor do cosseno do maior ângulo de T é:

a) 2/3
b) ½
c) 1/8
d) ¼
e) 1/3

Resoluções

1) **Alternativa e**

Solução: substituindo a relação fundamental.

$$\frac{sen^2x+cos^2x}{cosx} = \frac{1}{cosx} = secx$$

2) **Alternativa d**

Solução:

$$y = sen17°.\frac{cos17°}{sen17°}.\frac{cos73°}{sen73°}.\frac{1}{cos73°}$$

$$y = \frac{cos17°}{sen°73} \text{ (como } 73° + 17° = 90 \rightarrow \text{sen}73° = \cos17°)$$

$$y = \frac{cos17°}{cos17°} = 1$$

3) **Resposta:**

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

Solução: utilizando a fórmula de adição:
Sen75° = sen(30° + 45°) =

$$\text{Sen}75° = \text{sen}(30° + 45°) =$$
$$= \text{sen}30°.\cos45° + \text{sen}45°.\cos30° =$$
$$= \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

4) **Alternativa c**

Solução: utilizando as formulas de adição e subtração e sabendo que sen90° = 1 e cos90° = 0.

$$\frac{\cos(90°+x)}{sen(90°-x)} = \frac{cos90°.cosx-sen90°.senx}{sen90°.cosx-senx.cos90°} =$$

$$= \frac{0.cosx-1.senx}{1.cosx-0.senx} =$$

$$= \frac{-senx}{cosx} = -tgx$$

5) **Resposta: -3/4**

Solução: lembrando que , basta elevar o dado do enunciado ao quadrado.

$$sena + cosa = \frac{1}{2}$$

$$(sena + cosa)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\text{sen}^2\text{a} + 2.\text{sena.cosa} + \cos^2\text{a} = \frac{1}{4}$$

$$1 + \text{sen}(2\text{a}) = \frac{1}{4}$$

$$\text{sen}(2\text{a}) = \frac{1}{4} - 1 = \frac{1-4}{4} = -\frac{3}{4}$$

6) **Alternativa e**

Solução: utilizando as relações fundamentais e a fórmula do arco duplo.

$$3.sen10°.(tg5° + cotg°) =$$

$$= 3.sen(2.5°).\left(\frac{sen5°}{cos5°} + \frac{cos5°}{sen5°}\right) =$$

$$= 3.2.sen5°.cos5°.\frac{sen^2 5°+cos^2 5°}{sen5°.cos5°} =$$

$$= 6.1 = 6$$

7) **Resposta:** $\sqrt{2}$

Solução: de acordo com a Lei dos Senos.

$$\frac{x}{sen30°} = \frac{2}{sen45°}$$

$$x.sen45° = 2.sen30°$$

$$x.\frac{\sqrt{2}}{2} = 2.\frac{1}{2}$$

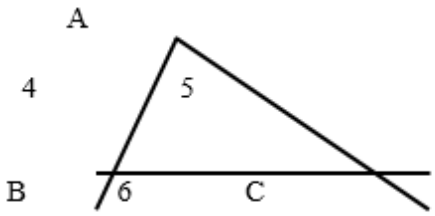
$$x = \frac{2}{\sqrt{2}} \text{ (racionalizando)}$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

8) **Alternativa c**

Solução: o maior ângulo de um triângulo esta de frente para o maior lado e basta utilizar a Lei dos cossenos.



- se 6 é o maior lado ➔ A é o maior ângulo.

$6^2 = 4^2 + 5^2 - 2.4.5.\cos A$

$36 = 16 + 25 - 40.\cos A$

$40.\cos A = 41 - 36$

$40.\cos A = 5$

$\cos A = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$

• CONHECIMENTOS ALGÉBRICOS/GEOMÉTRICOS – PLANO CARTESIANO; RETAS; CIRCUNFERÊNCIAS; PARALELISMO E PERPENDICULARIDADE, SISTEMAS DE EQUAÇÕES.

Plano Cartesiano – Equações da Reta

Eixo

Introdução

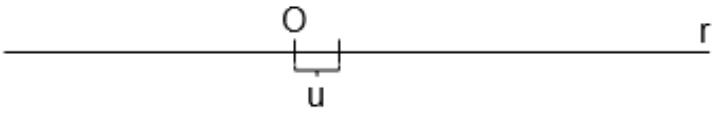
A Geometria Analítica é a parte da Matemática que trata de resolver problemas cujo enunciado é geométrico, empregando processos algébricos.

Criada por René Descartes (1596-1650), a Geometria Analítica contribui para a visão moderna da Matemática como um todo, substituindo assim a visão parcelada das chamadas "matemáticas", que colocava em compartilhamentos separados Geometria, Álgebra e Trigonometria.

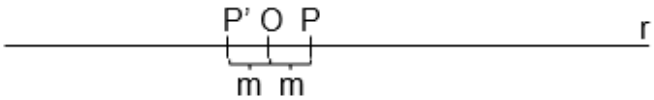
Essa integração da Geometria com Álgebra é muito rica em seus resultados, propriedades e interpretações. São inúmeras as aplicações da Geometria Analítica nas Ciências e na Técnica.

1- Abscissa de um ponto

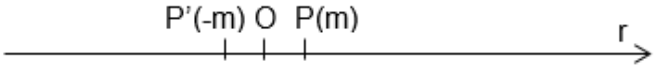
Considere-se uma reta **r**. Sobre ela, marque-se um ponto **O** arbitrário, que chamaremos de origem, e seja adotada uma unidade (**u**) de comprimento com a qual serão medidos os segmentos contidos na reta **r**.



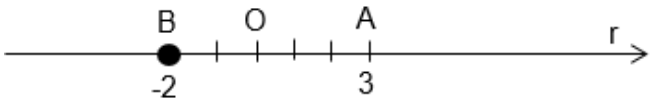
Tome-se na reta **r** os pontos **P** à direita de **O** e **P'** à esquerda de **O**, tais que, relativamente a (**u**), os segmentos e tenham a mesma medida **m**.



O sentido de **O** para **P** será considerado positivo e indicado por uma ponta de seta. Assim associa-se ao ponto **P** o número real positivo **m** e ao ponto **P'**, o número **–m**.



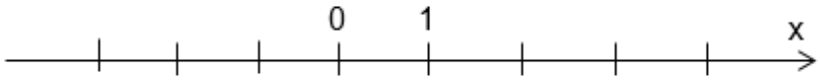
Dessa forma, associa-se a cada ponto da reta r um único número real, que será denominado abscissa (ou coordenada) do ponto; a abscissa é positiva se, a partir da origem, o ponto for marcado no sentido positivo, e é negativa em caso contrário.



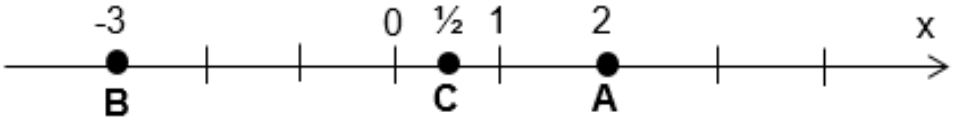
A(3): ponto A de abscissa 3
B (-2): ponto B de abscissa -2
O conjunto {reta, origem, unidade, sentido} será chamado **eixo**.

Notas
1) A abscissa da origem é o número real 0 (zero).
2) Cada ponto de um eixo possui uma única abscissa, e reciprocamente para cada abscissa existe um único ponto do eixo.
3) Costuma-se indicar pela letra x a abscissa de um ponto.

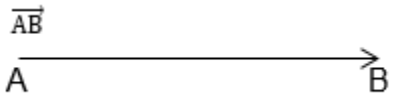
Exemplo 1
Marcar sobre o eixo x, representado abaixo, os pontos A(2), B(-3) e $C\left(\frac{1}{2}\right)$.



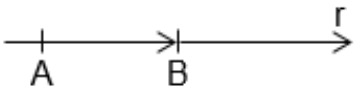
Resolução



2- Segmento Orientado
Dado um segmento de reta AB, é possível associar a ele o sentido de A para B ou o sentido de B para A. adotando-se, por exemplo, o sentido de A para B, tem-se o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ de origem A e extremidade B.



3- Medida Algébrica
Considere-se sobre um eixo r um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$.



A medida algébrica de $\overrightarrow{AB}$, que será indicada por $\overline{AB}$, é definida pelo número $X_B - X_A$, onde X_B e X_A são respectivamente as abscissas de B e de A.

Assim:

$\overline{AB} = X_B - X_A$

Exemplo 2

a) A(3), B(10) $\Big\}$ $\overline{AB} = X_B - X_A = 10 - 3 = 7$

b) A(1), B(8) $\Big\}$ $\overline{AB} = X_B - X_A = 1 - 8 = 7$

GRUPO NOVA

Observações

1) Quando o sentido de $\overrightarrow{AB}$ é o **mesmo** do eixo, a medida algébrica $\overrightarrow{AB}$ é positiva; em caso contrário, é negativa. Nessas condições, se $\overrightarrow{AB}$ tem medida algébrica positiva, então $\overrightarrow{BA}$ tem medida algébrica negativa.

2) O comprimento **d** de um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, é o módulo (valor absoluto) da medida algébrica de $\overrightarrow{AB}$, ou seja, $|\overline{AB}|$.

Em símbolos:

$$d = |\overline{AB}| = |X_B - X_A|$$

Exemplo 3

a) O comprimento do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, dados A(2) e B(11) é

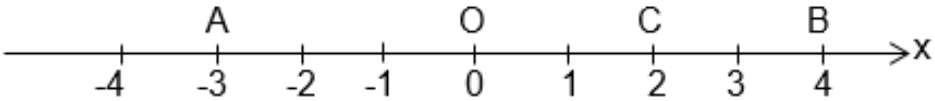
$$|\overline{AB}| = |X_B - X_A| = |11 - 2| = |9| = 9$$

b) O comprimento do segmento orientado $\overrightarrow{BA}$, dados A(3) e B(8) é

$$|\overline{AB}| = |X_B - X_A| = |3 - 8| = |-5| = 5$$

Exemplo 4

Na figura abaixo, os pontos A, B e C estão sobre o eixo x de origem O.



Calcular:

a) $\overline{AC}$

b) $\overline{BO}$

c) $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$

Resolução

Da figura, tem-se $X_A = -3$, $X_B = 4$ e $X_C = 2$.

Assim,

a) $\overline{AC} = X_C - X_A = 2 - (-3) = 5$

b) $\overline{BO} = X_O - X_B = 0 - 4 = -4$

c) $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{X_B - X_A}{X_C - X_B} = \frac{4-(-3)}{2-4} = -\frac{7}{2}$

Exemplo 5

Dados os pontos A(1) e B(9), determinar o ponto C tal que $\overline{AC} = 3 \times \overline{CB}$

Resolução

Seja X_C a abscisssa do ponto C:

$$\overline{AC} = 3 \times \overline{CB} \Rightarrow X_C - X_A = 3(X_B - X_C)$$

Substituindo-se as coordenadas dos pontos:
$X_C - 1 = 3(9 - XC) \therefore X_C = 7$

Resposta: C(7).

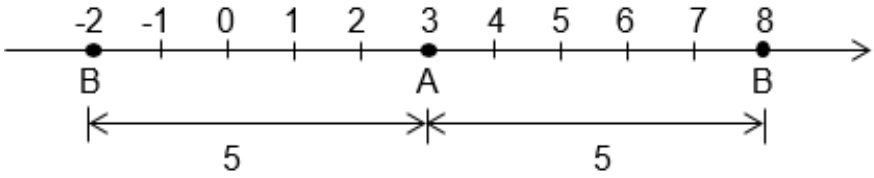
Exemplo 6

Dado o ponto A(3), determinar um ponto B que diste 5 unidades do ponto A.

Resolução
Seja XB a abscissa de B. Tem-se: $|\overline{AB}| = 5$, ou seja, $|X_B - X_A| = 5$

Então $|XB - 3| = 5$ → $X_B - 3 = 5 \rightarrow XB = 8$
ou
$X_B - 3 = -5 \rightarrow XB = -2$

De fato, existem dois pontos B que distam 5 unidades de A:



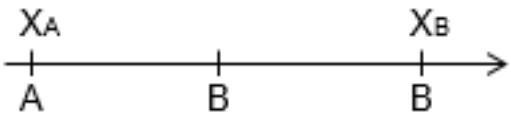
Resposta: B(8) ou B(-2).

4- Ponto Médio

Considerem-se os pontos $A(X_A)$ e $B(X_B)$. Sendo $M(X_M)$ o ponto médio de $\overrightarrow{AB}$ (ou de $\overrightarrow{BA}$), tem-se:

$$X_M = \frac{X_A + X_B}{2}$$

De fato,



$\overline{AM} = \overline{MB}$
$X_M - X_A = X_B - X_M$
$2X_M = X_A + X_B$
$X_M = \frac{X_A + X_B}{2}$

Portanto, a abscissa do ponto médio M do segmento $\overrightarrow{AB}$ (ou de $\overrightarrow{BA}$) é a média aritmética das abscissas de A e de B.

Exemplo 7

Determinar o ponto médio M do segmento $\overrightarrow{AB}$, nos seguintes casos:

a) A(1) e B(7)

Resolução

$$X_M = \frac{X_A+X_B}{2} = \frac{1+7}{2} = 4$$

Resposta: M(4).

b) A(-3) e B(15)

Resolução

$$X_M = \frac{X_A+X_B}{2} = \frac{-3+15}{2} = 6$$

Resposta: M(6).

c) A(-1) e B(-12)

Resolução

$$X_M = \frac{X_A+X_B}{2} = \frac{-1+(-12)}{2} = -\frac{13}{2}$$

Resposta: $M\left(-\frac{13}{2}\right)$.

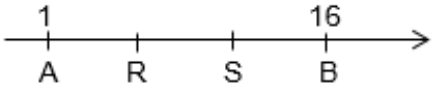
Resposta: M.

Exemplo 8

Dados os pontos A(1) e B(16), obter os pontos que dividem o segmento $\overrightarrow{AB}$ em três partes congruentes.

Resolução

Considere-se a figura abaixo, onde R e S são os pontos pedidos.



Como $\overline{AR}, \overline{RS}$ e $\overline{SB}$ são iguais, pode-se escrevre $\overline{AR} = 2\,\overline{SB}$, ou seja,

$X_S - X_A = 2(X_B - X_S)$

$X_S - 1 = 2(16 - X_S) \therefore X_S = 11$

Sendo R o ponto médio de $\overrightarrow{AS}$, vem:

$$X_R = \frac{X_A+A_S}{2} = \frac{1+11}{2} = 6$$

Resposta: R(6) e S(11).

Sistema Cartesiano

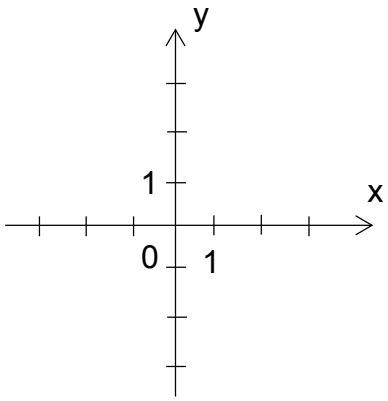
1- Coordenadas de um ponto

Sejam x e y dois eixos perpendiculares entre si e com origem O comum, conforme a figura abaixo. Nessas condições, diz-se que x e y formam um **sistema cartesiano retangular** (ou **ortogonal**), e o plano por eles determinado é chamado **plano cartesiano**.

Eixo x (ou Ox): eixo das abscissas

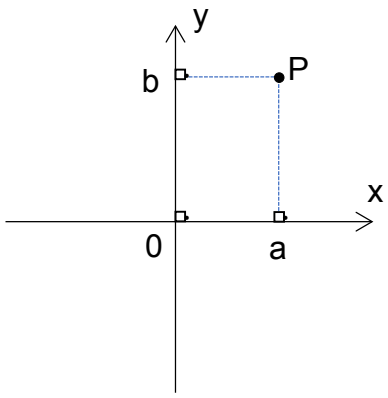
Eixo y (ou Ou): eixo das ordenadas

O: origem do sistema



A cada ponto P do plano corresponderão dois números: **a** (abscissa) e **b** (ordenada), associados às projeções ortogonais de P sobre o eixo x e sobre o eixo y, respectivamente.

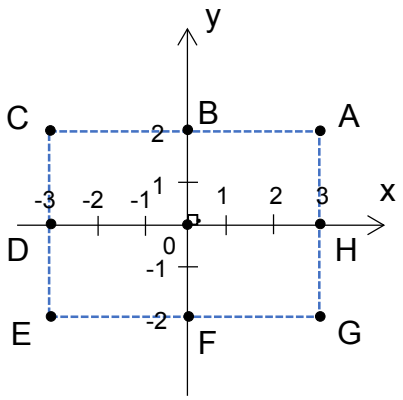
Assim, o ponto P tem coordenadas **a** e **b** e será indicado analiticamente pelo par ordenado (a, b).



Exemplo 1

Os pontos, no sistema cartesiano abaixo, têm suas coordenadas escritas ao lado da figura.

A (3, 2)
B (0, 2)
C (-3, 2)
D (-3, 0)
E (-3, -2)
F (0, -2)
G (3, -2)
H (3, 0)
O (0, 0)

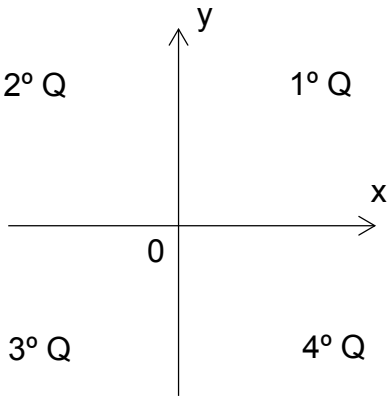


Nota

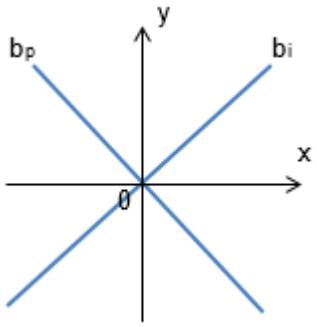
Neste estudo, será utilizado somente o sistema cartesiano retangular, que se chamará simplesmente sistema cartesiano.

Observações

1) Os eixos x e y dividem o plano cartesiano em quatro regiões ou quadrantes (Q), que são numeradas, como na figura abaixo.



2) Neste curso, a reta suporte das bissetrizes do 1º e 3º quadrantes será chamada bissetriz dos quandrantes ímapares e indica-se por b_i.a do 2º e 4º quadrantes será chamado bissetriz dos quadrantes pares e indica-se por b_p.

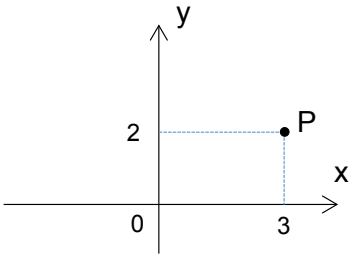


2- Propriedades

1) Todo ponto P(a, b) do 1º quadrante tem abscissa positiva (a > 0) e ordenada positiva (b > 0) e reciprocamente.

P(a, b) 1º Q a > 0 e b > 0

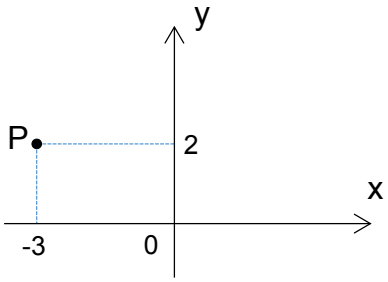
Assim P(3, 2) 1º Q



2) Todo ponto P(a, b) do 2º quadrante tem abscissa negativa (a < 0) e ordenada positiva (B > 0) e reciprocamente.

P(a, b) 2º Q a < 0 e b > 0

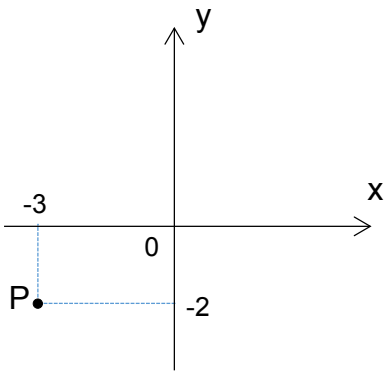
Assim P(-3, 2) 2º quadrante



3) Todo ponto P(a, b) do 3º quadrante tem abscissa negativa (a < 0) e ordenada negativa (b < 0) e reciprocamente.

P(a, b) 3º Q a < 0 e b < 0

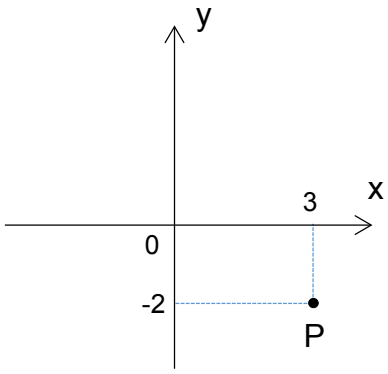
Assim P(-3, -2) 3º Q



4) Todo ponto P(a, b) do 4º quadrante tem abscissa positiva (a > 0) e ordenada negativa (B < 0) e reciprocamente.

P(a, b) 4º Q a > 0 e b < 0

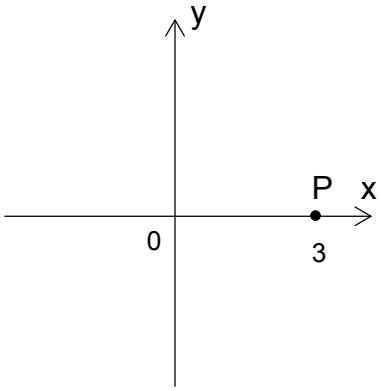
Assim P(3, -2) 4º Q



5) Todo eixo das abscissas tem ordenada nula e reciprocamente.

P(a, b) Ox b = 0

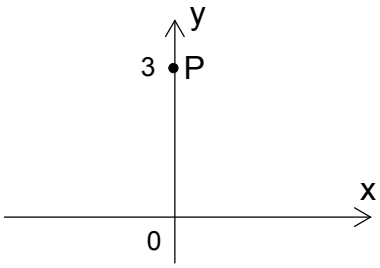
Assim P(3, 0) Ox



6) Todo ponto do eixo das ordenadas tem abscissa nula e reciprocamente.

P(a, b) Oy a = 0

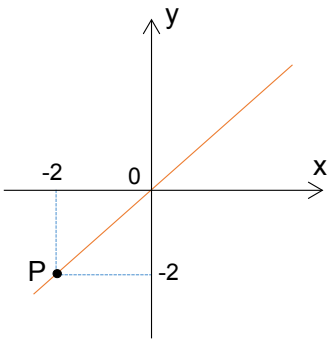
Assim P(0, 3) Oy



7) Todo ponto P(a, b) da bissetriz dos quadrantes ímpares tem abscissa e ordenada iguais (a = b) e reciprocamente.

P(a, b) b_i a = b

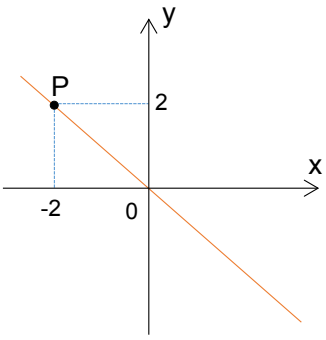
Assim P(-2, -2) b_i



8) Todo ponto P(a, b) da bissetriz dos quadrantes pares tem abscissa e ordenada opostas (a = -b) e reciprocamente.

P(a, b) b_p a = -b

Assim P(-2, 2) b_p



Exemplo 2

Obter **a**, sabendo-se que o ponto A(4, 3ª -6) está no eixo das abscissas.

Resolução

A Ox 3a – 6 = 0 ∴ a = 2

Resposta: 2.

Exemplo 3

Obter m, sabendo-se que o ponto M(2m – 1, m + 3) está na bissetriz dos quadrantes ímpares.

Resolução

$M \in b_i \Rightarrow 2m - 1 = m + 3 \therefore m = 4$

Resposta: 4.

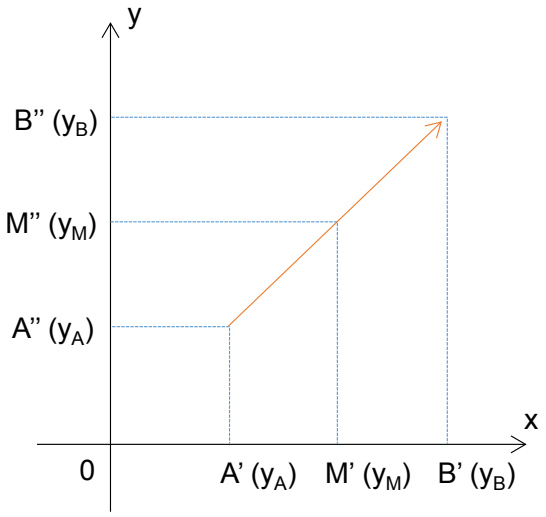
3- Ponto Médio

Considerem-se os pontoa $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Sendo $M(x_M, y_M)$ o ponto médio de $\overrightarrow{AB}$ (ou $\overrightarrow{BA}$), tem-se:

$x_M = \frac{x_A+x_B}{2}$ e $y_M = \frac{y_A+y_B}{2}$, ou seja,

o ponto médio é dado por:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$



De fato:
Se M é o ponto médio de $\overrightarrow{AB}$ (ou $\overrightarrow{BA}$), pelo teorema de Tales, para o eixo x pode-se escrever:

$$\overline{A'M'} = \overline{M'B'}$$
$$x_M - x_A = x_B - x_M$$
$$2x_M = x_A + x_B$$

$$x_M = \frac{x_A+x_B}{2}$$

Analogicamente, para o eixo y, tem-se

$$y_M = \frac{y_A+y_B}{2}$$

Portanto, as coordenadas do ponto médio M do segmento $\overrightarrow{AB}$ (ou $\overrightarrow{BA}$) são respectivamente as médias das abscissas de A e B e das ordenadas de A e B.

Exemplo 4

Obter o ponto médio M do segmento $\overrightarrow{AB}$, sendo dados: A(-1, 3) e B(0, 1).

Resolução

$$\left.\begin{array}{l} x_M = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2} \\ y_M = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{3+1}{2} = 2 \end{array}\right\} \therefore M\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$$

Resposta: $M\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$

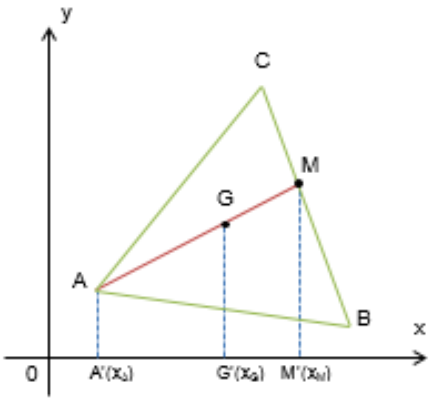
4 – Baricentro

Seja o triângulo ABC de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$. sendo $G(x_G, y_G)$ o baricentro (ponto de encontro das medianas) do triângulo ABC, tem-se:

$$x_G = \frac{x_A+x_B+x_C}{3} \text{ e } y_G = \frac{y_A+y_B+y_C}{3}$$

ou seja, o ponto G é dado por

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$



De fato, considerando a mediana AM, o baricentro G é tal que

$$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM}$$

Pelo Teorema de Tales, para o eixo x podemos escrever

$$\overline{A'G'} = 2\overline{G'M'}$$

$$x_G - x_A = 2(x_m - x_G) \Rightarrow 3x_G = x_A + 2x_M$$

e, como $x_M = \frac{x_A + x_C}{2}$, vem

$$3x_M = x_A + 2.\frac{x_B + x_C}{2}$$

ou seja, $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$

Analogamente, para o eixo y, tem-se

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Portanto, as coordenadas do baricentro de um triângulo ABC são, respectivamente, as médias aritméticas das abscissas de A, B e C e das ordenadas A, B e C.

Exemplo 5

Sendo A(1, -1), B(0, 2) e C(11, 5) os vértices de um triângulo, obter o baricentro G desse triângulo.

Resolução

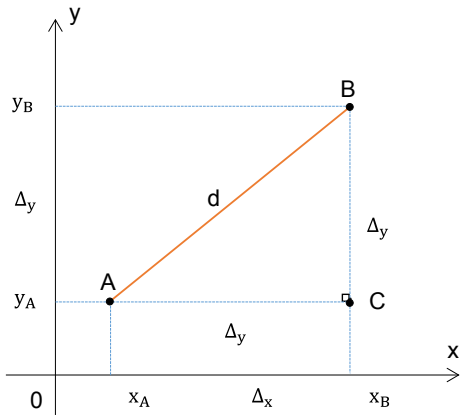
$$x_G = \frac{1+0+11}{3} = 4 \qquad y_G = \frac{-1+2+5}{3} = 2$$

Logo, G(4, 2).

5- Distância Entre Dois Pontos

Considerem-se dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, tais que o segmento não seja paralelo a algum dos eixos coordenados.

Traçando-se por A e B as retas paralelas aos eixos coordenados que se interceptam em C, tem-se o triângulo ACB, retângulo em C.



A distância entre os pontos A e B qie se indica por **d** é tal que

$$d^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$
$$= (\Delta_x)^2 + (\Delta_y)^2$$
$$= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Portanto:

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Observações

1) Como $(x_B - x_A)^2 = (x_A - x_B)^2$, a ordem escolhida para a diferença das abscissas não altera o cálculo de **d**. O mesmo ocorre com a diferença das ordenadas.

2) A fórmula para o cálculo da distância continua válida se o segmento $\overrightarrow{AB}$ é paralelo a um dos eixos, ou ainda se os pontos A e B coincidem, caso em que *d = 0*.

Exemplo 6

Calcular a distância entre os pontos A e B, nos seguintes casos:

a) A(1, 8) e B(4, 12)

Resolução

$$d = \sqrt{(4-1)^2 + (12-8)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

b) A(0, 2) e B(-1, -1)

Resolução

$$d = \sqrt{[0-(-1)]^2 + [2-(-1)]^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

Exemplo 7

Qual é o ponto da bissetriz dos quadrantes pares cuja distância ao ponto A(2, 2) é 4?

Resolução

Seja P o ponto procurado.
Como P pertence à bissetriz dos quadrantes pares (b_p), pode-se representá-lo por P(a, -a).

Sendo 4 a distância entre A e P, tem-se

$$\sqrt{(2-a)^2 + [2-(-a)]^2} = 4$$

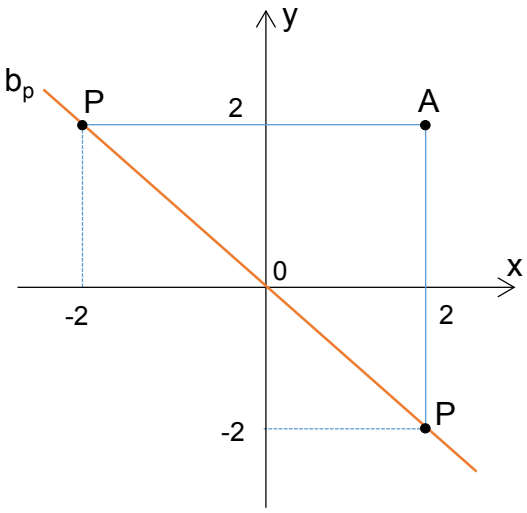
Quadrando

$$(2-a)^2 + (2+a)^2 = 16$$

$$4 - 4a + a^2 + 4 + 4a + a^2 = 16 \therefore a^2 = 4 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$$

Assim se a = 2, tem-se o ponto (2, -2)
se a = -2, tem-se o ponto (-2, 2)

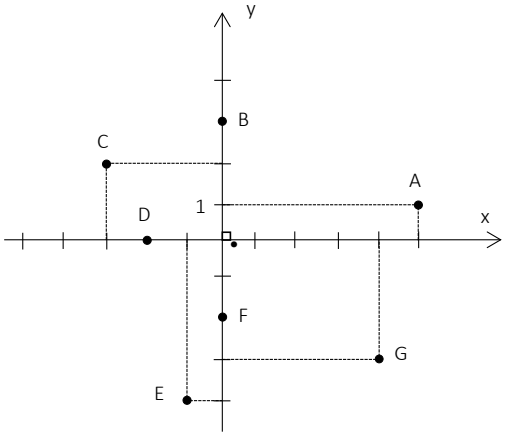
De fato, existem dois pontos P da bissetriz dos quadrantes pares (b_p) cuja distância ao ponto A(2, 2) é 4. Observe-se a figura:



Exercícios

QUESTÃO 01

Dar as coordenadas dos pontos A, B, C, D, E, F e G da figura abaixo:



QUESTÃO 02

Seja o ponto A(3p – 1, p – 3) um ponto pertencente à bissetriz dos quadrantes ímpares, então a ordenada do ponto A é:

a) 0

b) –1

c) –2

d) $-\frac{8}{3}$

e) –4

QUESTÃO 03

O ponto A(p – 2, 2p – 3) pertence ao eixo das ordenadas. Obter o ponto B' simétrico de B(3p – 1, p – 5) em relação ao eixo das abscissas.

QUESTÃO 04

Um triângulo equilátero de lado 6 tem um vértice no eixo das abscissas. Determine as coordenadas do 3º vértice, sabendo que ele está no 4º quadrante (faça a figura).

QUESTÃO 05

A distância entre dois pontos (2, -1) e (-1, 3) é igual a:

a) zero
b) $\sqrt{5}$
c) $\sqrt{7}$
d) 5
e) n.d.a.

QUESTÃO 06

Sendo A(3,1), B(4, -4) e C(-2, 2) os vértices de um triângulo, então esse triângulo é:

a) retângulo e não isósceles.
b) retângulo e isósceles.
c) equilátero.
d) isósceles e não retângulo.
e) escaleno.

QUESTÃO 07

Achar o ponto T da bissetriz dos quadrantes ímpares que enxerga o segmento de extremindades A(2, 1) e B(5, 2) sob ângulo reto.

QUESTÃO 08

O paralelogramo ABCD tem lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Sendo A(0, 0), B(4, 2) e D(8, 0), determine as coordenadas do ponto C.

Respostas

01- Resposta: A(5, 1); B(0, 3); C(-3, 2); D(-2, 0); E(-1, -4); F(0, -2); G(4, -3).

02- Resposta: E.

Resolução

Como A pertence à bissetriz dos quadrantes ímapres $x_A = y_A \Rightarrow 3p - 1 = p - 3 \Rightarrow p = 1$.

Logo, o ponto A(-4, -4) tem ordenada igual a -4.

03- Resposta: B'(5, 3).

Resolução

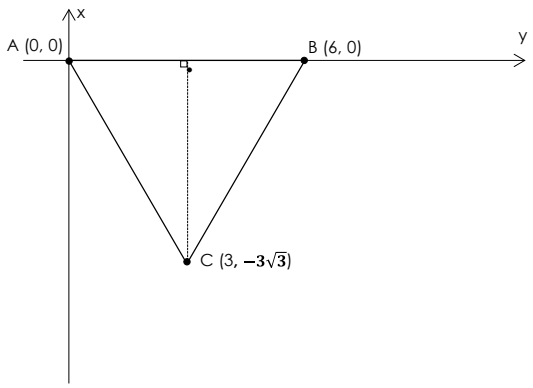
Se A pertence ao eixo das ordenadas, temos que $p - 2 = 0 \Rightarrow p = 2$, logo, B(5, –3).

Como B' é o simétrico de B em relação ao eixo das abscissas, temos a mesma abscissa e a ordenada oposta, logo, B'(5, 3) é o ponto procurado.

04- Resposta: C(3,).

Resolução

Lembrando que a altura do triângulo equilátero mede $\iota\frac{\sqrt{3}}{2}$, temos: $h = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.



05- Resposta: D

Resolução

$\Delta x = 2 - (-1) = 3$ e $\Delta y = -1 - 3 = -4$

$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2}$

$d = 5$

06- Resposta: D

Resolução

$d_{AB} = \sqrt{(3-4)^2 + (1+4)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$

$d_{AC} = \sqrt{(3+2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$

$d_{BC} = \sqrt{(4+2)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$

$d_{BC} > d_{AB} = d_{BC}$ e

$d^2{}_{BC} \neq d^2{}_{AB} + d^2{}_{BC}$

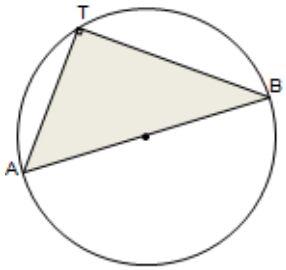
Portanto, o Δ ABC é isósceles e não retângulo.

07- Resposta; $T_1(2, 2)$ e $T_2(3, 3)$.

Resolução

T∈ bissetriz dos quadrantes ímpares ⇒ T(x, x).

Se T enxerga $\overline{AB}$ sob ângulo reto, então o triângulo ATB é retângulo em T.



$\Rightarrow d^2{}_{TA} + d^2{}_{TB} = d^2{}_{AB}$

Assim:

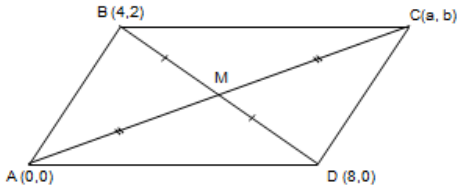
$[(x - 2)^2 + (x - 1)^2] + [(x - 5)^2 (x - 2)^2] = [(2 - 5)^2 + (1 - 2)^2]$

$X^2 - 4x + 4 + x^2 - 2x + 1 + x^2 - 10x + 25 + x^2 - 4x + 4 = 9 + 1$

$4x^2 - 20x + 24 = 0$

$X^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 3$.

08- Resposta: C(12, 2).



Resolução

M é o ponto de encontro das diagonais, portanto ponto médio dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Dados B e D, temos M(6, 1) e agora temos A e M, logo:

$$x_M = \frac{x_C + x_A}{2} \Rightarrow 6 = \frac{a+0}{2}$$

$$y_M = \frac{y_C + y_B}{2} \Rightarrow 1 = \frac{b+0}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b = 2 \end{cases}, \text{portanto}, C(12, 2)$$

Ponto, Reta e Plano

A definição dos entes primitivos **ponto**, **reta** e **plano** é quase impossível, o que se sabe muito bem e aqui será o mais importante é sua representação geométrica e espacial.

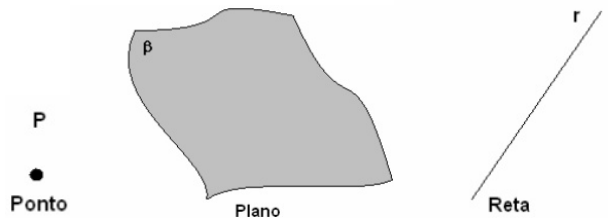
Representação, (notação)

→ Pontos serão representados por letras latinas maiúsculas; ex: A, B, C,...

→ Retas serão representados por letras latinas minúsculas; ex: a, b, c,...

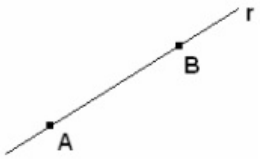
→ Planos serão representados por letras gregas minúsculas; ex: β,∞,α,...

Representação gráfica

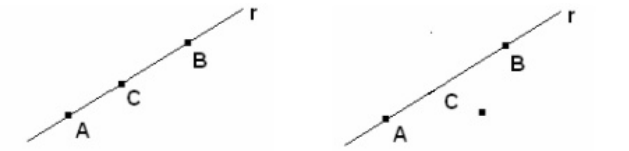


Postulados primitivos da geometria, qualquer postulado ou axioma é aceito sem que seja necessária a prova, contanto que não exista a contraprova.

- Numa reta bem como fora dela há infinitos pontos distintos.
- Dois pontos determinam uma única reta (uma e somente uma reta).

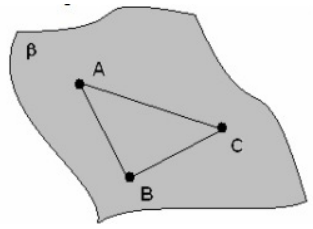


- Pontos colineares pertencem à mesma reta.

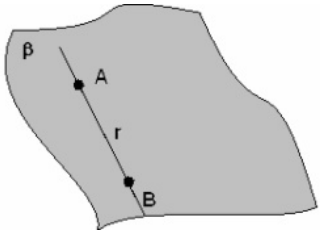


A, B e C são colineares. A, B e C não são colineares.

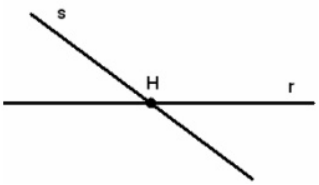
- Três pontos determinam um único plano.



- Se uma reta contém dois pontos de um plano, esta reta está contida neste plano.



- Duas retas são concorrentes se tiverem apenas um ponto em comum.



Observe que $r \cap s = \{H\}$. Sendo que H está contido na reta **r** e na reta **s**.

Um plano é um subconjunto do espaço R^3 de tal modo que quaisquer dois pontos desse conjunto podem ser ligados por um segmento de reta inteiramente contida no conjunto.

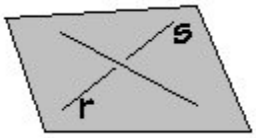
Um plano no espaço R^3 pode ser determinado por qualquer uma das situações:

- Três pontos não colineares (não pertencentes à mesma reta);
- Um ponto e uma reta que não contem o ponto;
- Um ponto e um segmento de reta que não contem o ponto;
- Duas retas paralelas que não se sobrepõe;

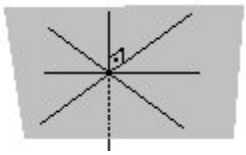
- Dois segmentos de reta paralelos que não se sobrepõe;
- Duas retas concorrentes;
- Dois segmentos de reta concorrentes.

Duas retas (segmentos de reta) no espaço R^3 podem ser: paralelas, concorrentes ou reversas.

Duas retas são ditas reversas quando uma não tem interseção com a outra e elas não são paralelas. Pode-se pensar de uma reta r desenhada no chão de uma casa e uma reta s desenhada no teto dessa mesma casa.



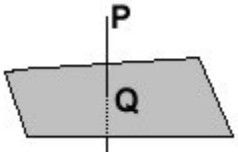
Uma reta é perpendicular a um plano no espaço R^3, se ela intersecta o plano em um ponto P e todo segmento de reta contido no plano que tem P como uma de suas extremidades é perpendicular à reta.



Uma reta r é paralela a um plano no espaço R^3, se existe uma reta s inteiramente contida no plano que é paralela à reta dada.

Seja P um ponto localizado fora de um plano. A distância do ponto ao plano é a medida do segmento de reta perpendicular ao plano em que uma extremidade é o ponto P e a outra extremidade é o ponto que é a interseção entre o plano e o segmento.

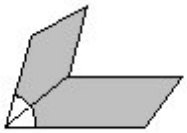
Se o ponto P estiver no plano, a distância é nula.



Planos concorrentes no espaço R^3 são planos cuja interseção é uma reta.

Planos paralelos no espaço R^3 são planos que não tem interseção.

Quando dois planos são concorrentes, dizemos que tais planos formam um diedro e o ângulo formado entre estes dois planos é denominado **ângulo diedral**. Para obter este ângulo diedral, basta tomar o ângulo formado por quaisquer duas retas perpendiculares aos planos concorrentes.



Planos normais são aqueles cujo ângulo diedral é um ângulo reto (90 graus).

Razão entre Segmentos de Reta

Segmento de reta é o conjunto de todos os pontos de uma reta que estão limitados por dois pontos que são as extremidades do segmento, sendo um deles o ponto inicial e o outro o ponto final. Denotamos um segmento por duas letras como, por exemplo, AB, sendo A o início e B o final do segmento.

Exemplo

AB é um segmento de reta que denotamos por AB.

A _____ B

Não é possível dividir um segmento de reta por outro, mas é possível realizar a divisão entre as medidas dos dois segmentos.

Consideremos os segmentos AB e CD, indicados:

A _____ B m(AB) = 2cm

C _____ D m(CD) = 5 cm

A razão entre os segmentos AB e CD, denotado aqui por, AB/CD, é definida como a razão entre as medidas desses segmentos, isto é: AB/CD = 2/5

Segmentos Proporcionais

Proporção é a igualdade entre duas razões equivalentes. De forma semelhante aos que já estudamos com números racionais, é possível estabelecer a proporcionalidade entre segmentos de reta, através das medidas desse segmentos.

Vamos considerar primeiramente um caso particular com quatro segmentos de reta:

m(AB)= 2cm A____B P_____Q m(PQ) =4 cm

m(CD)= 3cm C_____D R_____S m(RS) = 6cm

A razão entre os segmentos AB e CD e a razão entre os segmentos PQ e RS, são dadas por frações equivalentes, isto é: AB/CD = 2/3; PQ/RS = 4/6 e como 2/3 = 4/6, segue a existência de uma proporção entre esses quatro segmentos de reta. Isto nos conduz à definição de segmentos proporcionais.

Diremos que quatro segmentos de reta, AB, BC, CD e DE, nesta ordem, são proporcionais se: AB/BC = CD/DE

Os segmentos AB e DE são os segmentos extremos e os segmentos BC e CD são os segmentos meios.

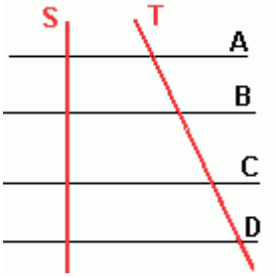
A proporcionalidade acima é garantida pelo fato que existe uma proporção entre os números reais que representam as medidas dos segmentos:

$$\frac{m\,(AB)}{m\,(BC)} = \frac{m\,(CD)}{m\,(DE)}$$

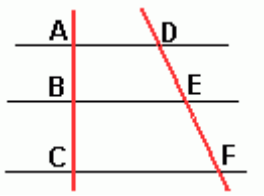
Propriedade Fundamental das proporções: Numa proporção de segmentos, o produto das medidas dos segmentos meios é igual ao produto das medidas dos segmentos extremos. m(AB) · m(DE) = m(BC) · m(CD)

Feixe de Retas Paralelas

Um conjunto de três ou mais retas paralelas num plano é chamado feixe de retas paralelas. A reta que intercepta as retas do feixe é chamada de reta transversal. As retas A, B, C e D que aparecem no desenho anexado, formam um feixe de retas paralelas enquanto que as retas S e T são retas transversais.



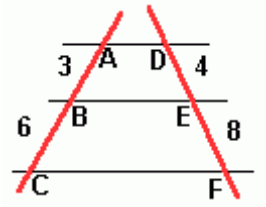
Teorema de Tales: Um feixe de retas paralelas determina sobre duas transversais quaisquer, segmentos proporcionais. A figura abaixo representa uma situação onde aparece um feixe de três retas paralelas cortadas por duas retas transversais.



Identificamos na sequência algumas proporções:
AB/BC = DE/EF
BC/AB = EF/DE
AB/DE = BC/EF
DE/AB = EF/BC

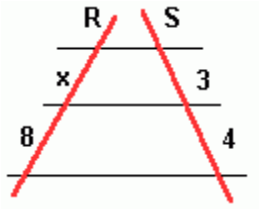
Exemplo

Consideremos a figura ao lado com um feixe de retas paralelas, sendo as medidas dos segmentos indicadas em centímetros.



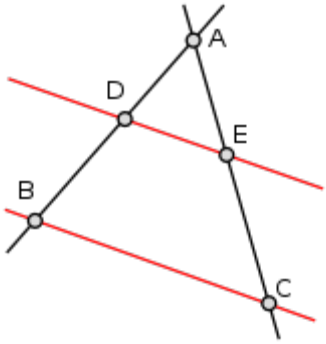
Assim:
BC/AB = EF/DE
AB/DE = BC/EF
DE/AB = EF/BC

Observamos que uma proporção pode ser formulada de várias maneiras. Se um dos segmentos do feixe de paralelas for desconhecido, a sua dimensão pode ser determinada com o uso de razões proporcionais.



Exercício

Nos exercícios de 1 a 3, utilize Teorema de Tales para determinar o que se pede a respeito da situação ilustrada pela imagem a seguir:



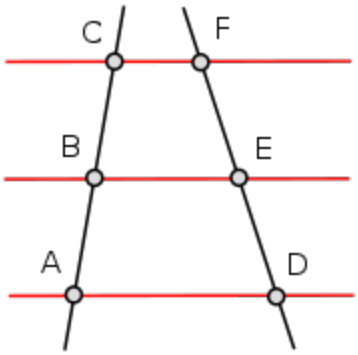
As retas *DE* e *BC* são paralelas.

Exercício 1: Considerando a figura acima, determine o comprimento do segmento $\overline{AD}$, supondo que $\overline{DB} = 5cm$, $\overline{EC} = 10cm$ e $\overline{AE} = 8cm$.

Exercício 2: Determine $\overline{AD}$ e $\overline{DB}$, supondo que na figura ao lado $\overline{AB} = 26cm$, $\overline{AE} = 8cm$ e $\overline{EC} = 5cm$.

Exercício 3: Determine AD e DB, supondo que $\overline{AB} = 27cm$, $\overline{AE} = 10cm$ e $\overline{AC} = 18cm$.

Do exercício 4 até o exercício 7, utilize Teorema de Tales para determinar o que se pede a respeito da situação ilustrada pela seguinte imagem:



As retas *AD*, *BE* e *CF* são paralelas.

Exercício 4: Determine $\overline{AB}$, supondo que $\overline{BC} = 10cm$, $\overline{DE} = 18cm$ e $\overline{EF} = 20cm$.

Exercício 5: Determine $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, supondo que $\overline{AC} = 30cm$, $\overline{DE} = 8cm$ e $\overline{EF} = 7cm$.

Exercício 6: Determine a medida de $\overline{AB}$, supondo que $\overline{AC} = 20cm$, $\overline{DF} = 30cm$ e que $\overline{EF}$ é 4*cm* maior que $\overline{BC}$.

Exercício 7: Determine $\overline{AC}$, supondo que $\overline{DE} = 12cm$, $\overline{EF} = 8cm$ e que $\overline{AB}$ é 3*cm* maior que $\overline{BC}$.

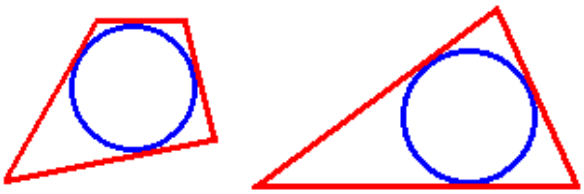
Exercício 8: Considere um triângulo $\triangle ABC$ tal que $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 6$ e $\overline{CA} = 7$. Desenhe sobre o segmento $\overline{BC}$ um ponto *M* tal que $\overline{BM} = 4$. A reta paralela a $\overline{AC}$ que passa por *M* encontra $\overline{BA}$ no ponto *N*. Calcule $\overline{BN}$, $\overline{AN}$ e $\overline{MN}$.

Respostas:

01- AD=4cm
02- 8 e 18 respectivamente.
03- 15 e 12 respectivamente.
04- 09cm
05- 16 e 14 respectivamente.
06- 12cm
07- 15cm
08- 10/3 , 5/3 e 14/3 respectivamente.

Polígonos circunscritos

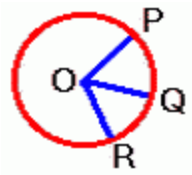
Polígono circunscrito a uma circunferência é o que possui seus lados tangentes à circunferência. Ao mesmo tempo, dizemos que esta circunferência está inscrita no polígono.



Propriedade dos quadriláteros circunscritos: Se um quadrilátero é circunscrito a uma circunferência, a soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois lados.

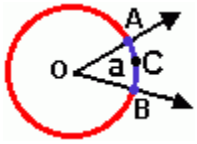
Arco de circunferência e ângulo central

Seja a circunferência de centro O traçada ao lado. Pela definição de circunferência temos que OP = OQ = OR =... e isto indica que os raios de uma circunferência são segmentos congruentes.



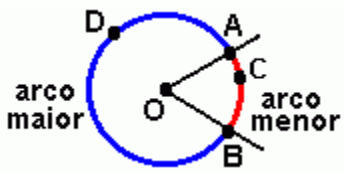
Circunferências congruentes: São circunferências que possuem raios congruentes. Aqui a palavra **raio** refere-se ao segmento de reta e não a um número.

Ângulo central: Em uma circunferência, o ângulo central é aquele cujo vértice coincide com o centro da circunferência. Na figura, o ângulo a é um ângulo central. Se numa circunferência de centro O, um ângulo central determina um arco AB, dizemos que AB é o arco correspondente ao ângulo AÔB.

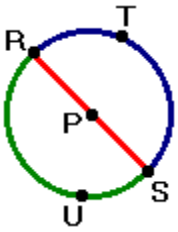


Arco menor: É um arco que reúne dois pontos da circunferência que não são extremos de um diâmetro e todos os pontos da circunferência que estão dentro do ângulo central cujos lados contêm os dois pontos. Na figura, a linha vermelha indica o arco menor AB ou arco menor ACB.

Arco maior: É um arco que liga dois pontos da circunferência que não são extremos de um diâmetro e todos os pontos da circunferência que estão fora do ângulo central cujos lados contêm os dois pontos. Na figura a parte azul é o arco maior, o ponto D está no arco maior ADB enquanto o ponto C não está no arco maior, mas está no arco menor AB, assim é frequentemente usado três letras para representar o arco maior.

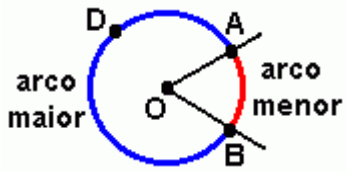


Semicircunferência: É um arco obtido pela reunião dos pontos extremos de um diâmetro com todos os pontos da circunferência que estão em um dos lados do diâmetro. O arco RTS é uma semicircunferência da circunferência de centro P e o arco RUS é outra.

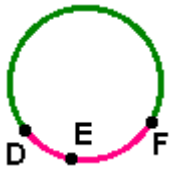


Observações: Em uma circunferência dada, temos que:

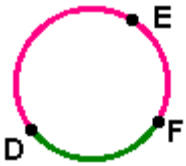
- A medida do arco menor é a medida do ângulo central correspondente a m(AÔB) e a medida do arco maior é 360 graus menos a medida do arco menor m(AÔB).



- A medida da semicircunferência é 180 graus ou Pi radianos.
- Em circunferências congruentes ou em uma simples circunferência, arcos que possuem medidas iguais são arcos congruentes.
- Em uma circunferência, se um ponto E está entre os pontos D e F, que são extremidades de um arco menor, então: m(DE)+m(EF)=m(DF).



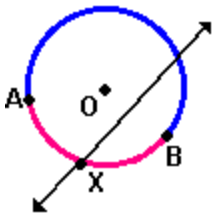
- Se o ponto E está entre os pontos D e F, extremidades de um arco maior: m(DE) + m(EF) = m(DEF).



- Apenas esta última relação faz sentido para as duas últimas figuras apresentadas.

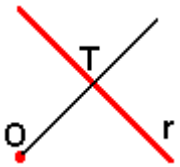
Propriedades de arcos e corda

Uma corda de uma circunferência é um segmento de reta que une dois pontos da circunferência. Se os extremos de uma corda não são extremos de um diâmetro eles são extremos de dois arcos de circunferência sendo um deles um arco menor e o outro um arco maior. Quando não for especificada, a expressão arco de uma corda se referirá ao arco menor e quanto ao arco maior sempre teremos que especificar.



Observações: Se um ponto X está em um arco AB e o arco AX é congruente ao arco XB, o ponto X é o ponto médio do arco AB. Além disso, qualquer segmento de reta que contém o ponto X é um segmento bissetor do arco AB. O ponto médio do arco não é o centro do arco, o centro do arco é o centro da circunferência que contém o arco.

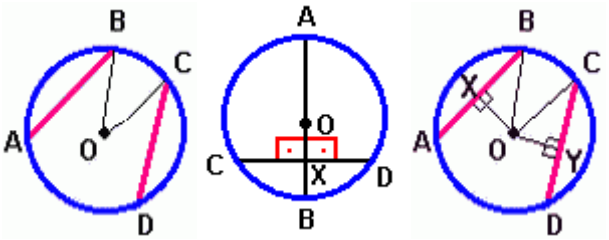
- Para obter a distância de um ponto O a uma reta r, traçamos uma reta perpendicular à reta dada passando pelo ponto O. O ponto T obtido pela interseção dessas duas retas é o ponto que determinará um extremo do segmento OT cuja medida representa a distância entre o ponto e a reta.



- Em uma mesma circunferência ou em circunferências congruentes, cordas congruentes possuem arcos congruentes e arcos congruentes possuem cordas congruentes. (Situação 1).

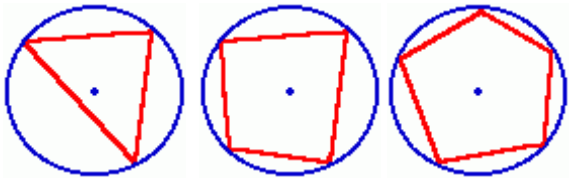
- Um diâmetro que é perpendicular a uma corda é bissetor da corda e também de seus dois arcos. (Situação 2).

- Em uma mesma circunferência ou em circunferências congruentes, cordas que possuem a mesma distância do centro são congruentes. (Situação 3).

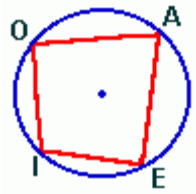


Polígonos inscritos na circunferência

Um polígono é inscrito em uma circunferência se cada vértice do polígono é um ponto da circunferência e neste caso dizemos que a circunferência é circunscrita ao polígono.



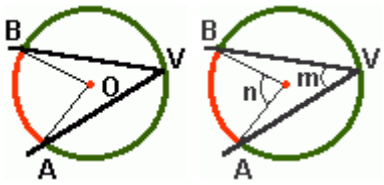
Propriedade dos quadriláteros inscritos: Se um quadrilátero está inscrito em uma circunferência então os ângulos opostos são suplementares, isto é a soma dos ângulos opostos é 180 graus e a soma de todos os quatro ângulos é 360 graus.



Â + Î = 180 graus
Ê + Ô = 180 graus
Â + Ê + Î + Ô = 360 graus

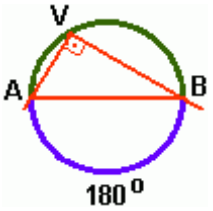
Ângulos inscritos

Ângulo inscrito: relativo a uma circunferência é um ângulo com o vértice na circunferência e os lados secantes a ela. Na figura à esquerda abaixo, o ângulo AVB é inscrito e AB é o arco correspondente.



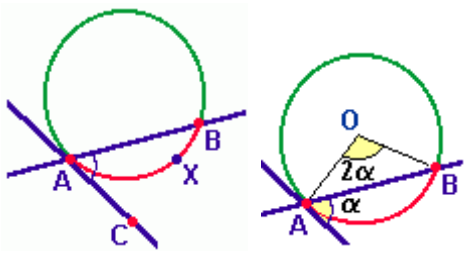
Medida do ângulo inscrito: A medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é igual à metade da respectiva medida do ângulo central, ou seja, a metade de seu arco correspondente, isto é: m = n/2 = (1/2) m(AB)

Ângulo reto inscrito na circunferência: O arco correspondente a um ângulo reto inscrito em uma circunferência é a semicircunferência. Se um triângulo inscrito numa semicircunferência tem um lado igual ao diâmetro, então ele é um triângulo retângulo e esse diâmetro é a hipotenusa do triângulo.



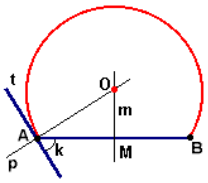
Ângulo semi-inscrito e arco capaz

Ângulo semi-inscrito: Ângulo semi-inscrito ou ângulo de segmento é um ângulo que possui um dos lados tangente à circunferência, o outro lado secante à circunferência e o vértice na circunferência. Este ângulo determina um arco (menor) sobre a circunferência. No gráfico ao lado, a reta secante passa pelos pontos A e B e o arco correspondente ao ângulo semi-inscrito BAC é o arco AXB onde X é um ponto sobre o arco.

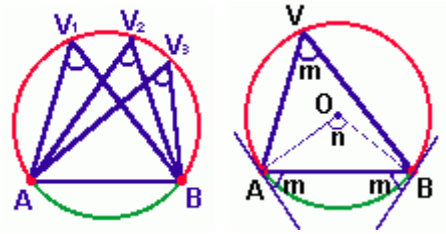


Observação: A medida do ângulo semi-inscrito é a metade da medida do arco interceptado. Na figura, a medida do ângulo BÂC é igual a metade da medida do arco AXB.

Arco capaz: Dado um segmento AB e um ângulo k, pergunta-se: Qual é o lugar geométrico de todos os pontos do plano que contém os vértices dos ângulos cujos lados passam pelos pontos A e B sendo todos os ângulos congruentes ao ângulo *k*? Este lugar geométrico é um arco de circunferência denominado *arco capaz*.

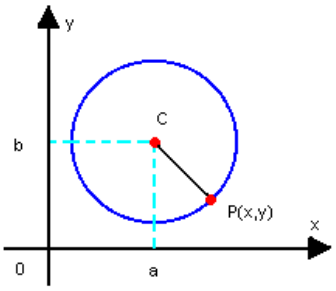


Observação: Todo ângulo inscrito no arco capaz AB, com lados passando pelos pontos A e B são congruentes e isto significa que, o segmento de reta AB é sempre visto sob o mesmo ângulo de visão se o vértice deste ângulo está localizado no arco capaz. Na figura abaixo à esquerda, os ângulos que passam por A e B e têm vértices em V_1, V_2, V_3,..., são todos congruentes (a mesma medida).



Na figura acima à direita, o arco capaz relativo ao ângulo semi-inscrito m de vértice em A é o arco AVB. Se n é ângulo central então a medida de m é o dobro da medida de n, isto é: m(arco AB) = 2 medida(m) = medida(n)

Assim, sendo **C**(a, b) o centro e **P**(x, y) um ponto qualquer da circunferência, a distância de **C** a **P**(d_{CP}) é o raio dessa circunferência. Então:



$$d_{CP} = \sqrt{(X_P - X_C)^2 + (Y_P - Y_C)^2} \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \Rightarrow$$

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$$

Portanto, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ é a equação reduzida da circunferência e permite determinar os elementos essenciais para a construção da circunferência: as coordenadas do centro e o raio.

Observação: Quando o centro da circunfer6encia estiver na origem (C(0,0)), a equação da circunferência será $x^2 + y^2 = r^2$.

Equação Geral

Desenvolvendo a equação reduzida, obtemos a equação geral da circunferência:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Como exemplo, vamos determinar a equação geral da circunferência de centro **C**(2,-3) e raio r=4.

A equação reduzida da circunferência é: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$

Desenvolvendo os quadrados dos binômios, temos:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 - 16 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$

Determinação do centro e do raio da circunferência, dada à equação geral

Dada a equação geral de uma circunferência, utilizamos o processo de fatoração de trinômio quadrado perfeito para transformá-la na equação reduzida e, assim, determinamos o centro e o raio da circunferência. Para tanto, a equação geral deve obedecer a duas condições:

- Os coeficientes dos termos x^2 e y^2 devem ser iguais a 1;
- Não deve existir o termo xy.

Então, vamos determinar o centro e o raio da circunferência cuja equação geral é $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$.

Observando a equação, vemos que ela obedece às duas condições. Assim:

1º passo: agrupamos os termos em **x** e os termos em **y** e isolamos o termo independente

$x^2 - 6x + _ + y^2 + 2y + _ = 6$

2º passo: determinamos os termos que completam os quadrados perfeitos nas variáveis **x** e **y**, somando a ambos os membros as parcelas correspondentes

$$x2 - 6x + 9 + y2 + 2y + 1 = 6 + 9 + 1$$

$$x \quad 2x \quad 3 \quad y \quad 2y \,.\, 1$$

3º passo: fatoramos os trinômios quadrados perfeitos

$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$

4º passo: obtida a equação reduzida, determinamos o centro e o raio

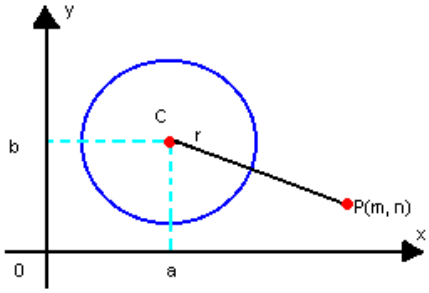
$$\left.\begin{array}{l} a = 3 \\ b = -1 \end{array}\right\} C(3, -1)$$

$$r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$$

Posição de um ponto em relação a uma circunferência

Em relação à circunferência de equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, o ponto P(m, n) pode ocupar as seguintes posições:

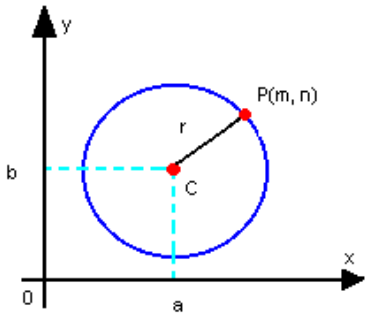
a) **P** é exterior à circunferência



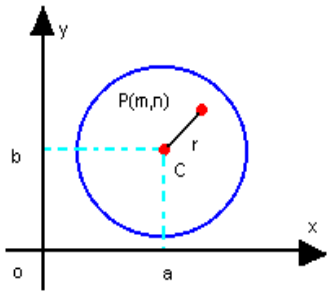
$$CP > r \Rightarrow \sqrt{(Xp - Xc)^2 + (Yp - Yc)^2} > r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{(m - a)^2 + (n - b)^2} > r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (m - a)^2 + (n - b)^2 > r^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (m - a)^2 + (n - b)^2 - r^2 > 0$$

$$CP = r \Rightarrow (m - a)^2 + (n - b)^2 = r^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (m - a)^2 + (n - b)^2 - r^2 = 0$$

b) **P** pertence à circunferência



c) **P** é interior à circunferência



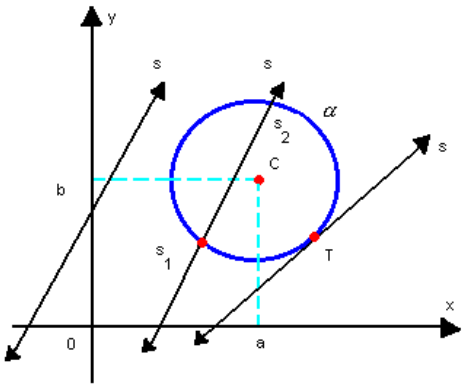
$$CP < r \Rightarrow (m - a)^2 + (n - b)^2 < r^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (m - a)^2 + (n - b)^2 - r^2 < 0$$

Assim, para determinar a posição de um ponto P(m, n) em relação a uma circunferência, basta substituir as coordenadas de P na expressão $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2$:

- se $(m - a)^2 + (n - b)^2 - r^2 > 0$, então **P** é exterior à circunferência;
- se $(m - a)^2 + (n - b)^2 - r^2 = 0$, então **P** pertence à circunferência;
- se $(m - a)^2 + (n - b)^2 - r^2 < 0$, então **P** é interior à circunferência.

Posição de uma reta em relação a uma circunferência

Dadas uma reta s: Ax + Bx + C = 0 e uma circunferência α de equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, vamos examinar as posições relativas entre **s** e α:



$s \cap \alpha = \emptyset \Rightarrow s$ é exterior a α

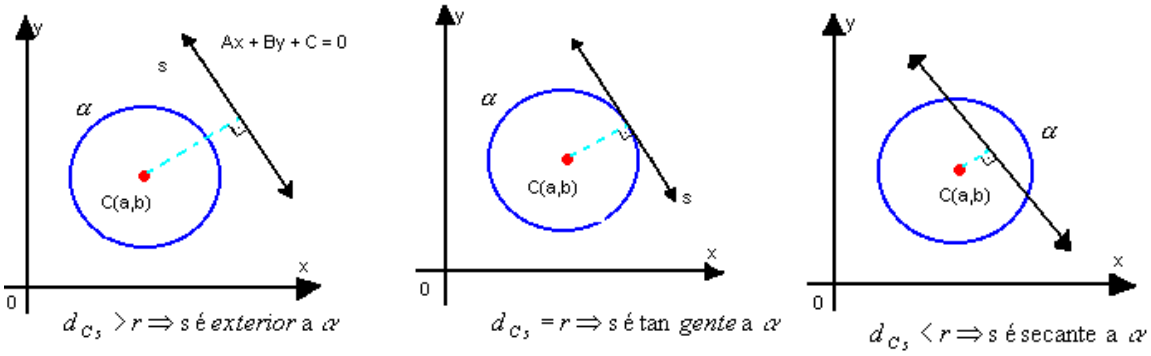
$s \cap \alpha = \{T\} \Rightarrow s$ é tangente a α

$s \cap \alpha = \{s_1, s_2\} \Rightarrow s$ é secante a α

Também podemos determinar a posição de uma reta em relação a uma circunferência calculando a distância da reta ao centro da circunferência. Assim, dadas a reta **s**: Ax + By + C = 0 e a circunferência : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, temos:

$$d_{C_s} = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

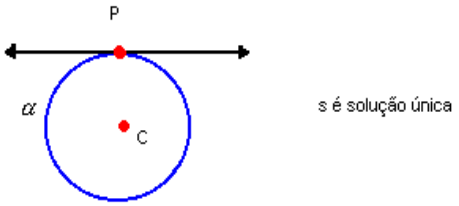
Assim:



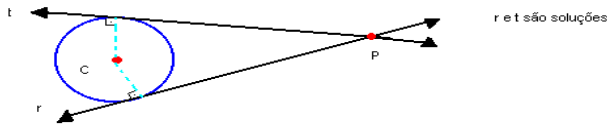
Condições de tangência entre reta e circunferência

Dados uma circunferência e um ponto **P**(x, y) do plano, temos:

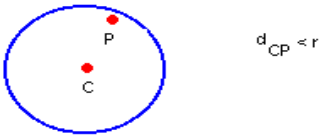
a) se **P** pertence à circunferência, então existe uma única reta tangente à circunferência por **P**



b) se **P** é exterior à circunferência, então existem duas retas tangentes a ela por **P**



c) se **P** é interior à circunferência, então não existe reta tangente à circunferência passando pelo ponto **P**



Exercícios

QUESTÃO 01

Dado um hexágono regular com área 48 R[3] cm². Calcular a razão entre as áreas dos círculos inscrito e circunscrito. Escreva a equação da circunferência cujo extremos do diâmetro é dado pelos pontos A(2,–1) e B(6,3).

QUESTÃO 01

Dada uma equação reduzida de uma circunferência $(x - 1)^{2 + (y + 4)2 = 9}$, dizer qual a origem e o raio da circunferência:

QUESTÃO 03

Para a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x$? $2y + 6 = 0$, observar posição relativa dos seguintes pontos

a) P(2, 1)

b) Q(5, 1)

QUESTÃO 04

Examinar a posição relativa entre a reta r: 2x + y ? 2 = 0 e a circunferência l: $(x ? 1)^{2 + (y ? 5)2 = 5}$

QUESTÃO 05

Obter as equações das tangentes à circunferência l: x2 + y2 = 9, que sejam paralelas à reta s: 2x + y ? 1 = 0.

QUESTÃO 06

A projeção de uma corda sobre o diâmetro que passa por uma de suas extremidades é 36 cm. Calcule o comprimento da corda, sabendo que o raio da circunferência é 50 cm.

QUESTÃO 01

Se um ponto P da circunferência trigonométrica corresponde a um número x real, qual é a forma dos outros números que também correspondem a esse mesmo ponto?

QUESTÃO 08

Quantas voltas serão dadas na circunferência trigonométrica para se representar os números $\frac{25\pi}{12}$ e -12?

QUESTÃO 09

Qual o comprimento do arco descrito pelo ponteiro dos minutos de um relógio cujo mostrador tem 5 cm de diâmetro, após ter passado 1 hora?

QUESTÃO 10

Calcule qual a medida em graus do ângulo formado pelos ponteiros do relógio às 15h 15min.

Respostas

1) Solução:

Como os pontos A e B são os extremos do diâmetro, o ponto médio entre eles é o centro da circunferência. Encontrando então o centro temos h = (2 + 6) / 2 = 8 / 2 = 4 e k = (–1 + 3) / 2 = 2 / 2 = 1 e daí, o centro é o ponto C(4,1). A distância entre o centro e qualquer um dos pontos A ou B é o raio.

Logo, $R = d_{CB} = \sqrt{(6-4)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$.

Então a equação é dada por: $x^{2 + y2 - 2.4.x - 2.1.y + 42 + 12 - \sqrt{8}\ 2 = 0}$ ou x2 + y2 – 8x – 2y + 9 = 0.

2) Solução:

Basta compararmos a equação dada com a equação genérica reduzida de uma circunferência:

$x_0 = 1$

$y_0 = -4$

$r^2 = 9 \rightarrow r = 3$

Assim a origem está no ponto (1, -4) e ela possui um raio de 3.

3) Solução:

a) $2^2 + 1^2 ? 6.2 ? 2.1 + 6 = -3 < 0$

P é interno à circunferência

b) $5^2 + 1^2 ? 6.5 ? 2.1 + 6 = 0$

Q Percente à circunferência.

4) Solução:

Procuraremos as eventuais interseções entre elas, isolando o y da reta e jogando na equação da circunferência teremos:

$y = 2 ? 2x$

$x^2 + (2 ? 2x)^2 ? 2x ? 10 . (2 ? 2x) + 21 = 0$

$x^2 + 2x + 1 = 0$

Nesta equação temos discriminante (delta) nulo e única solução x = -1, o que leva a um único y, que é 4, assim a reta tangencia a circunferência.

5) Solução:

Nestes casos é aconselhável que a equação da reta esteja como de fato está, na sua forma geral, pois as tangentes t, sendo paralelas a s, manterão o coeficiente angular e poderemos escrever suas equações como 2x + y + c = 0 , bastando, então, encontrar os valores de c:

As tangentes distam r = 3 do centro (0,0):

$d_{C,t} = |c| /05 = 3$

$c = \pm 305$

Portanto $t_1 : 2x + y + 305 = 0$ e $t_2 : 2x + y - 305 = 0$.

6) Solução:

Para Achar o comprimento de uma circunferencia tem que usar essa formua C=2.π.r

Sendo π (pi) = 3,14

r = Raio

C=2×3,14×50

C=6,28×50

C=31,4.

7) Solução:

Dado um número real **x**, fica determinado um ponto P da circunferência trigonométrica, de modo que o comprimento do arco AP, bem como a medida em radianos do arco AP, é **x**. Qualquer outro número real que difira do número **x**, por um número inteiro de vezes 2π, irá corresponder a esse mesmo ponto P.

Assim, a forma dos outros números que também correspondem a esse mesmo ponto é $x + 2k\pi,\ k \in Z$.

8) Solução:

Dado o número real $\frac{25}{12}\pi$, temos:

$$\frac{25}{12}\pi = 2\pi + \frac{\pi}{12}$$

Portanto, para representá-lo será necessário dar uma volta inteira e mais um doze avos de meia volta, no sentido positivo de percurso, isto é, no sentido anti-horário.

Por outro lado, dado o número real -12, temos: $\frac{-12}{2\pi} = \frac{-6}{\pi} \cong -1{,}91$, ou seja, será dada, aproximadamente, uma volta inteira e mais 0,91 de volta no sentido horário, já que o número dado é negativo.

9) Solução:

Como o diâmetro do relógio é de 5 cm, temos que o raio é 2,5 cm.

Após 1 hora, o ponteiro dos minutos descreve um ângulo de uma volta no relógio, ou seja, o arco descrito é um arco de uma volta.

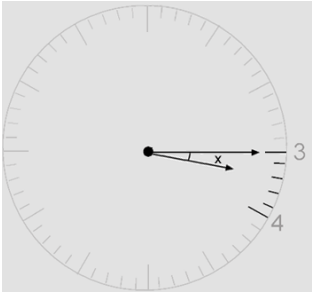
Assim, o comprimento desse arco é $C = 2\pi \cdot 2{,}5 \cong 15{,}70$ cm.

10) Solução:

Sabemos que, a cada hora, o ponteiro das horas se desloca 30°. E, portanto, em 15 minutos, ele se desloca 7°30'.

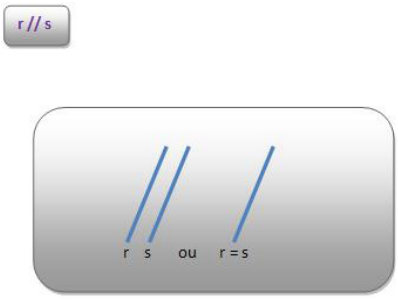
Já o ponteiro dos minutos se desloca 90° em 15 minutos.

Logo, o ângulo entre os dois ponteiros é de 7°30', às 15h e 15min.



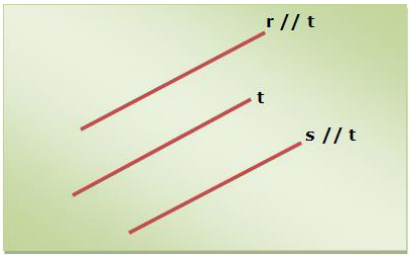
Retas Paralelas

As retas paralelas são consideradas paralelas se forem coplanares com interseções vazia ou são coincidentes. Vejamos:



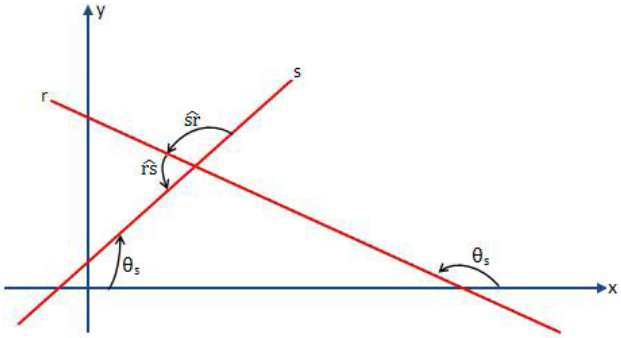
Paralelismo

Se dissermos que duas retas são paralelas a uma terceira, elas assim serão consideradas paralelas entre si. Vejamos a figura:



Ângulo entre duas retas

Considere as retas concorrentes **r** e **s** (não-verticais) no plano cartesiano, com declividades $\mathbf{m_r}$ e $\mathbf{m_s}$, respectivamente:



Para identificar os ângulos, entre as retas **r** e **s**, podemos usar a nomenclatura:

$\widehat{sr}$- ângulo de s para r (sentido anti-horário)

$\widehat{rs}$ - ângulo de r para s (sentido anti-horário)

Cálculo do ângulo $\widehat{sr} = \theta_r - \theta_s$, então:

$$tg\ \widehat{sr} = tg\ (\theta_r - \theta_s) \Leftrightarrow tg\ \widehat{sr} = \frac{tg\ \theta_r - tg\ \theta_s}{1 + tg\ \theta_r \cdot tg\ \theta_s}$$

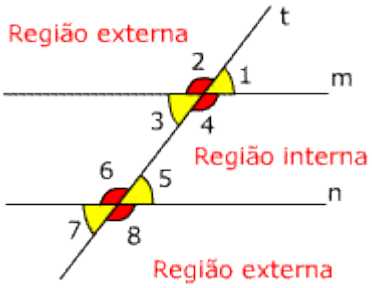
Logo que $m_r = tg\ \theta_r$ e $m_s = tg\ \theta_s$, temos:

$$tg\ \widehat{sr} = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}$$

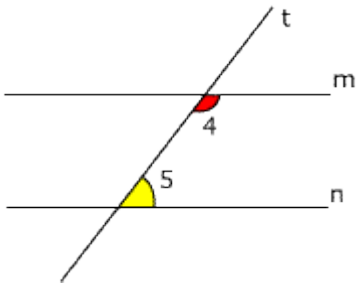
Ângulos formados por duas retas paralelas com uma transversal

Lembre-se: Retas paralelas são retas que estão no mesmo plano e não possuem ponto em comum.

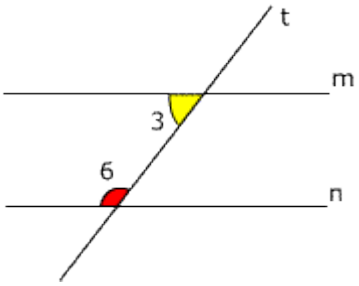
Vamos observar a figura abaixo:



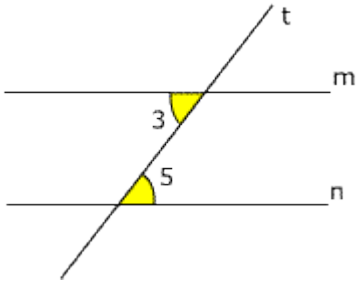
Ângulos colaterais internos: (colaterais = mesmo lado)



A soma dos ângulos 4 e 5 é igual a 180°.

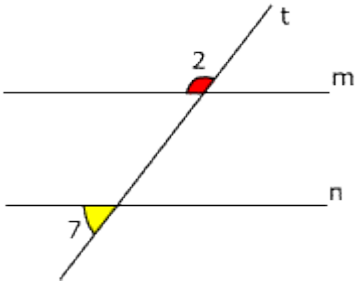


A soma dos ângulos 3 e 6 é igual a 180°



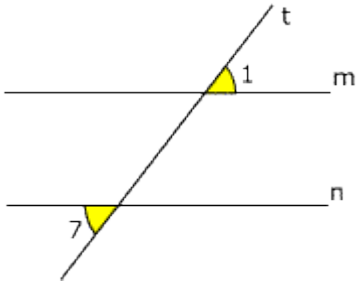
Os ângulos 3 e 5 são congruentes (iguais)

Ângulos colaterais externos:

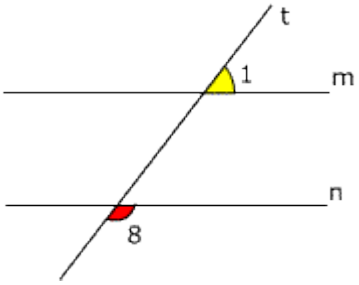


A soma dos ângulos 2 e 7 é igual a 180°

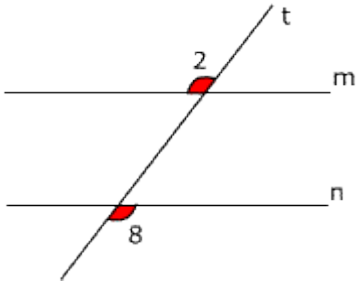
Ângulos alternos externos:



Os ângulos 1 e 7 são congruentes (iguais)

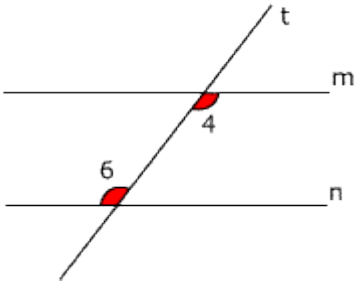


A soma dos ângulos 1 e 8 é igual a 180°



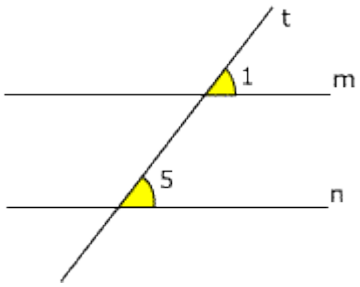
Os ângulos 2 e 8 são congruentes (iguais)

Ângulos alternos internos: (alternos = lados diferentes)



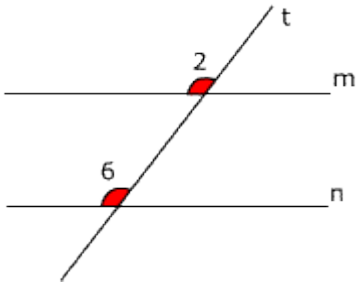
Os ângulos 4 e 6 são congruentes (iguais)

Ângulos correspondentes: são ângulos que ocupam uma mesma posição na reta transversal, um na região interna e o outro na região externa.

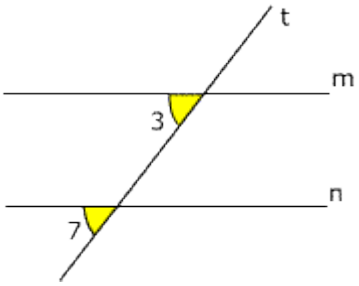


Os ângulos 1 e 5 são congruentes (iguais)

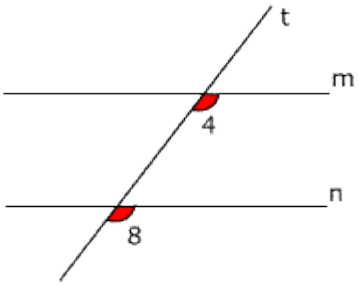
GRUPO NOVA



os ângulos 2 e 6 são congruentes (iguais)



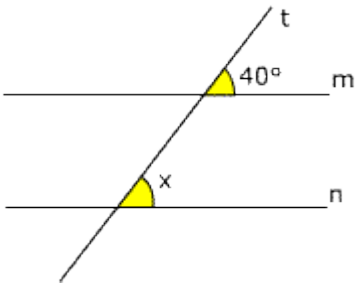
os ângulos 3 e 7 são congruentes (iguais)



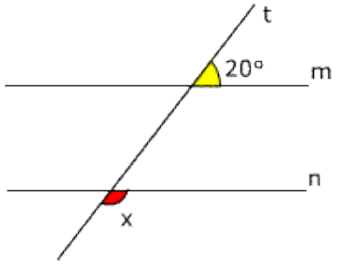
os ângulos 4 e 8 são congruentes (iguais)

Exercícios Resolvidos

1. Determine o valor de x nas figuras abaixo:



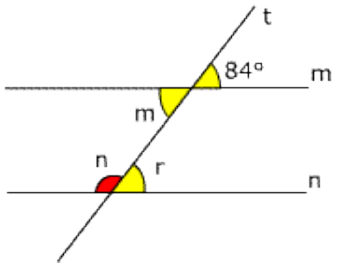
São ângulos correspondentes



x + 20° = 180°
x = 180° - 20°
x = 160°

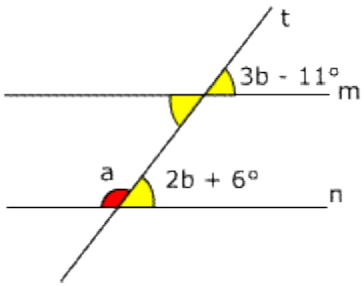
O ângulo x é igual ao ângulo que se forma abaixo do ângulo de 20°, logo a soma dos dois é igual a 180°.

2. Determine m, n e r na figura abaixo:



m = 84° São ângulos opostos pelo vértice.
r = 84° São ângulos correspondentes.
r + n = 180° São ângulos suplementares a soma é igual a 180°
84° + n = 180° (substituímos r por 84°)
n = 180° - 84°
n = 96°

3. Sendo m // n, determine o valor de a em graus na figura seguinte: (// Paralelas)

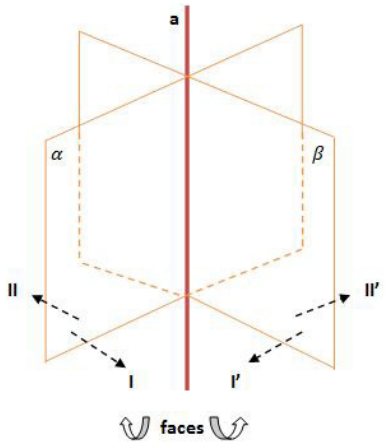


Os ângulos são concorrentes, logo são ângulos iguais.
3b - 11° = 2b + 6°
3b - 2b = 6° + 11°
b = 17°

Os ângulos são suplementares, logo a soma entre eles é igual a 180°.
a + (2b + 6°) = 180°
a + 2b + 6° = 180°
a + 2(17°) + 6° = 180°(substituímos b por 17°)
a + 34° + 6° = 180°
a + 40° = 180°
a = 180° - 40°
a = 140°

Diedros

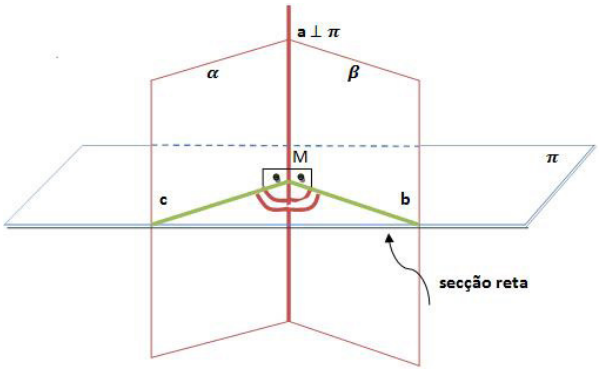
Os planos secantes a e β estabelecem no espaço quatro semi-espaços. O corte de dois desses semi-espaços é chamado de diedro.



Na imagem: a e β representam as faces. A reta "a" representa a aresta do diedro determinado pelo corte dos semiplanos I e I'.

Secção reta de um diedro

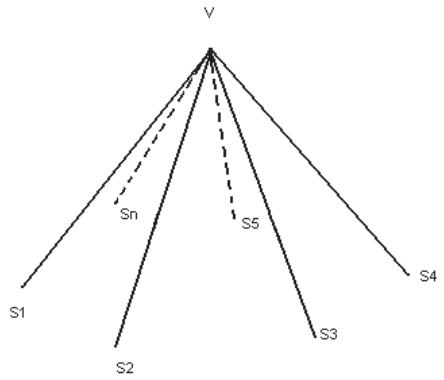
Chamamos de seção reta, o angulo determinado pelo corte de um diedro com um plano perpendicular a sua aresta.



Na imagem: A superfície π perpendicular à aresta a determina a secção reta definida pelo ângulo $b\hat{M}c$. São congruentes, todas as secções retas do mesmo diedro. A proporção de um diedro é a proporção da sua secção reta. Dois diedros são congruentes, sempre que suas secções são congruentes.Caso o plano π não seja perpendicular à aresta a, obteremos apenas uma secção inclinada.

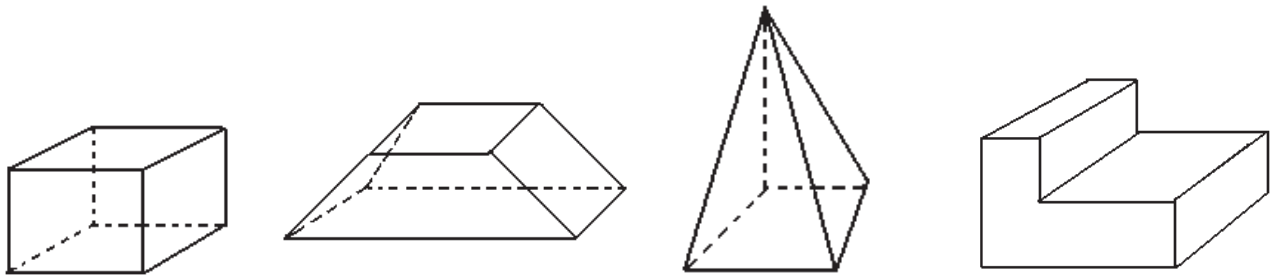
Ângulo Poliédrico

Sejam **n ≥ 3** semi-retas de mesma origem tais que nunca fiquem três num mesmo semiplano. Essas semi-retas determinam **n** ângulos em que o plano de cada um deixa as outras semi-retas em um mesmo semi-espaço. A figura formada por esses ângulos é o *ângulo poliédrico*.



Poliedros

Poliedros são sólidos geométricos ou figuras geométricas espaciais formadas por três elementos básicos: faces, arestas e vértices. Chamamos de *poliedro* o sólido limitado por quatro ou mais polígonos planos, pertencentes a planos diferentes e que têm dois a dois somente uma aresta em comum. Veja alguns exemplos:



Os polígonos são as faces do poliedro; os lados e os vértices dos polígonos são as arestas e os vértices do poliedro.

Poliedros convexos e côncavos

Observando os poliedros acima, podemos notar que, considerando qualquer uma de suas faces, os poliedros encontram-se inteiramente no mesmo semi-espaço que essa face determina. Assim, esses poliedros são denominados *convexos*.

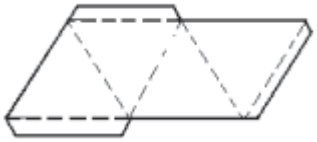
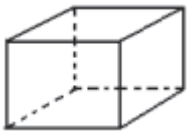
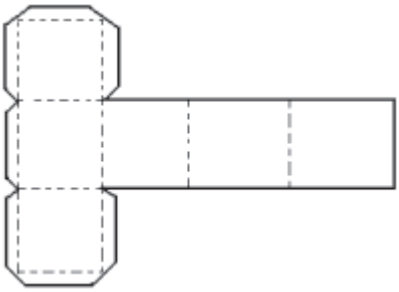
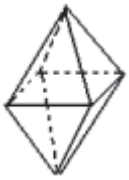
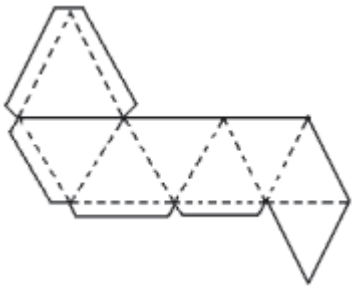
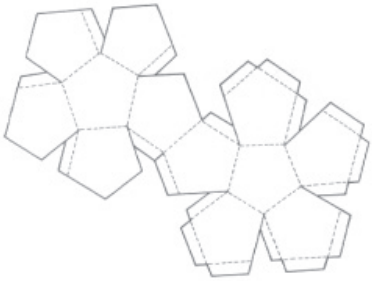
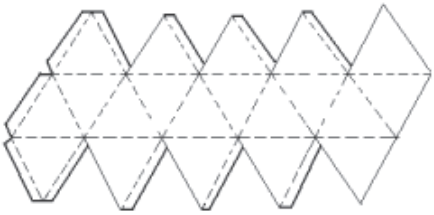
Isso não acontece no último poliedro, pois, em relação a duas de suas faces, ele não está contido apenas em um semi-espaço. Portanto, ele é denominado côncavo.

Classificação

Os poliedros convexos possuem nomes especiais de acordo com o número de faces, como por exemplo:
- tetraedro: quatro faces
- pentaedro: cinco faces
- hexaedro: seis faces
- heptaedro: sete faces
- octaedro: oito faces
- icosaedro: vinte faces

Poliedros Regulares

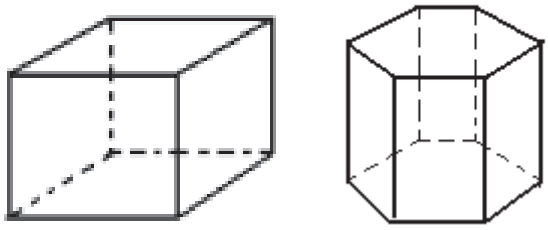
Um poliedro convexo é chamado de regular se suas faces são polígonos regulares, cada um com o mesmo número de lados e, para todo vértice, converge um mesmo número de arestas. Existem cinco poliedros regulares:

Poliedro	Planificação	Elementos
Tetraedro		4 faces triangulares 4 vértices 6 arestas
 Hexaedro		6 faces quadrangulares 8 vértices 12 arestas
 Octaedro		8 faces triangulares 6 vértices 12 arestas
Dodecaedro		12 faces pentagonais 20 vértices 30 arestas
Icosaedro		20 faces triangulares 12 vértices 30 arestas

Ao estudarmos os poliedros convexos verificamos uma importante relação existente entre o número de faces, arestas e vértices. Leonhard Euler foi um matemático suíço que, dentre várias contribuições para a matemática, desenvolveu uma relação que calcula o número de arestas (A), faces (F) e vértices (V) de um poliedro, desde que haja dois valores.

Relação de Euler

Em todo poliedro convexo é válida a relação seguinte: **V - A + F = 2** em que **V** é o número de vértices, **A** é o número de arestas e **F**. o número de faces. Observe os exemplos:



V=8 A=12 F=6 V = 12 A = 18 F = 8
8 - 12 + 6 = 2 12 - 18 + 8 = 2

Exemplo 1: Calcule o número de arestas de um sólido que possui 8 vértices e 6 faces.
V – A + F = 2
8 – A + 6 = 2
A = 14 – 2
A = 12

Exemplo 2: Um sólido geométrico tem 6 vértices e 10 arestas. Calcule o número de faces desse sólido.
V – A + F = 2
6 – 10 + F = 2
F = 2 + 4
F = 6

Poliedros Platônicos

Diz-se que um poliedro é platônico se, e somente se:
- for convexo;
- em todo vértice concorrer o mesmo número de arestas;
- toda face tiver o mesmo número de arestas;
- for válida a relação de Euler.

Assim, nas figuras acima, o primeiro poliedro é platônico e o segundo, não-platônico.

Exercícios

Questões 01 a 05. Responder Certo ou Errado (justificar quando for necessário)

QUESTÃO 01
Ângulo plano de um diedro é ângulo de secção reta.

QUESTÃO 02
Se duas secções de um diedro são congruentes, então elas são paralelas.

QUESTÃO 03
Não existe o triedro cujas faces medem 120°, 75° e 45°.

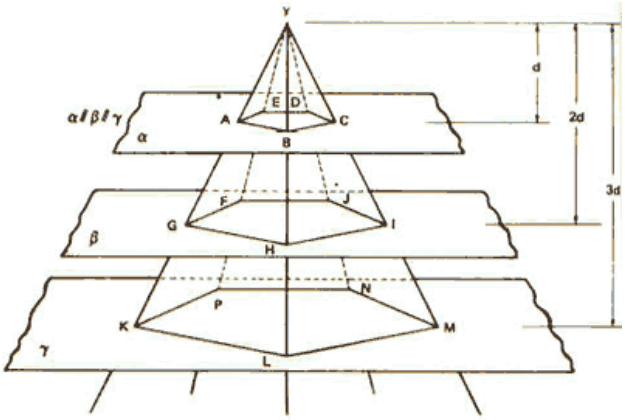
QUESTÃO 04
A terceira face do triedro, cujas duas outras medem 50° e 130° devem ser maior que 60° e menor que 160°.

QUESTÃO 05
O terceiro diedro do triedro, cujos outros dois medem 70° e 130° só podem ser maior que 20° e menor que 120°.

QUESTÃO 06
06. Responder Certo ou Errado (justificar quando for necessário). Se um plano corta uma pirâmide de base 100m² a dois terços do vértice, a área da secção mede 75m².

QUESTÃO 07
Qual o polígono regular cuja soma dos ângulos internos é igual à soma dos ângulos das faces de um tetraedro regular?

Considere a figura e responda as questões 08 a 10.



QUESTÃO 08
Seja
A = área do polígono (ABCDE)
B = área do polígono (GHIJF)
C = área do polígono (KLMNP), então podemos afirmar:
a) A + B = C
b) C - A = 2B
c) A - C = B
d) B + C = 10ª
e) B - C = A

Respostas:

01-Certo

02-Errado

03-Certo

04-Errado

05-Certo

06-Errado

07-Hexágono

08-B

SISTEMA DO 1º GRAU

Definição

Observe o raciocínio: João e José são colegas. Ao passarem por uma livraria, João resolveu comprar 2 cadernos e 3 livros e pagou por eles R$ 15,40, no total dos produtos. José gastou R$ 9,20 na compra de 2 livros e 1 caderno. Os dois ficaram satisfeitos e foram para casa.

No dia seguinte, encontram um outro colega e falaram sobre suas compras, porém não se lembrava do preço unitário de dos livros. Sabiam, apenas que todos os livros, como todos os cadernos, tinham o mesmo preço.

Bom, diante deste problema, será que existe algum modo de descobrir o preço de cada livro ou caderno com as informações que temos ? Será visto mais à frente.

Um sistema de equação do primeiro grau com duas incógnitas x e y, pode ser definido como um conjunto formado por duas equações do primeiro grau. Lembrando que equação do primeiro grau é aquela que em todas as incógnitas estão elevadas à potência 1.

Observações gerais

Em tutoriais anteriores, já estudamos sobre equações do primeiro grau com duas incógnitas, como exemplo: X + y = 7 x – y = 30 x + 2y = 9 x – 3y = 15

Foi visto também que as equações do 1° grau com duas variáveis admitem infinitas soluções:

X + y = 6 x – y = 7

x	y		x	y
0	6		0	-7
1	5		1	-6
2	4		2	-5
3	3		3	-4
4	2		4	-3
5	1		5	-2
6	0		6	-1
...			...	

Vendo a tabela acima de soluções das duas equações, é possível checar que o par (4;2), isto é, x = 4 e y = 2, é a solução para as duas equações.

Assim, é possível dizer que as equações

X + y = 6

X – y = 7

Formam um sistema de equações do 1º grau.

Exemplos de sistemas:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y + 2z = 10 \\ 4x - 5y + z = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 5x - 2y = 22 \end{cases}$$

Observe este símbolo. A matemática convencionou neste caso para indicar que duas ou mais equações formam um sistema.

Resolução de sistemas

Resolver um sistema significa encontrar um par de valores das incógnitas **X** e **Y** que faça verdadeira as equações que fazem parte do sistema.

Exemplos:

a) O par (4,3) pode ser a solução do sistema

x – y = 2

x + y = 6

Para saber se estes valores satisfazem ao sistema, basta substituir os valores em ambas as equações:

x - y = 2 x + y = 6

4 – 3 = 1 4 + 3 = 7

1 ≠ 2 (falso) 7 ≠ 6 (falso)

A resposta então é falsa. O par (4,3) não é a solução do sistema de equações acima.

b) O par (5,3) pode ser a solução do sistema

x – y = 2

x + y = 8

Para saber se estes valores satisfazem ao sistema, basta substituir os valores em ambas as equações:

x - y = 2 x + y = 8

5 – 3 = 2 5 + 3 = 8

2 = 2 (verdadeiro 8 = 8 (verdadeiro)

A resposta então é verdadeira. O par (5,3) é a solução do sistema de equações acima.

Métodos para solução de sistemas do 1º grau.

- Método de substituição

Esse método de resolução de um sistema de 1º grau estabelece que "extrair" o valor de uma incógnita é substituir esse valor na outra equação.

Observe:

x – y = 2

x + y = 4

Vamos escolher uma das equações para "extrair" o valor de uma das incógnitas, ou seja, estabelecer o valor de acordo com a outra incógnita, desta forma:

$x - y = 2$ ---> $x = 2 + y$

Agora iremos substituir o "**X**" encontrado acima, na "**X**" da segunda equação do sistema:

$x + y = 4$
$(2 + y) + y = 4$
$2 + 2y = 4$ ----> $2y = 4 - 2$ -----> $2y = 2$ ----> $y = 1$

Temos que: $x = 2 + y$, então
$x = 2 + 1$
$x = 3$

Assim, o par (3,1) torna-se a solução verdadeira do sistema.

- Método da adição

Este método de resolução de sistema do 1° grau consiste apenas em somas os termos das equações fornecidas.

Observe:
$x - y = -2$
$3x + y = 5$

Neste caso de resolução, somam-se as equações dadas:

$x - y = -2$
$\underline{3x + y = 5}$ +
$4x = 3$
$x = 3/4$

Veja nos cálculos que quando somamos as duas equações o termo "Y" se anula. Isto tem que ocorrer para que possamos achar o valor de "X".

Agora, e quando ocorrer de somarmos as equações e os valores de "x" ou "y" não se anularem para ficar somente uma incógnita ?

Neste caso, é possível usar uma técnica de cálculo de multiplicação pelo valor excludente negativo.

Ex.:
$3x + 2y = 4$
$2x + 3y = 1$

Ao somarmos os termos acima, temos:
$5x + 5y = 5$, então para anularmos o "x" e encontramos o valor de "y", fazemos o seguinte:

» multiplica-se a 1ª equação por +2
» multiplica-se a 2ª equação por – 3

Vamos calcular então:
$3x + 2y = 4$ (x +2)
$2x + 3y = 1$ (x -3)
$6x + 4y = 8$
$\underline{-6x - 9y = -3}$ +
$-5y = 5$
$y = -1$

Substituindo:
$2x + 3y = 1$
$2x + 3.(-1) = 1$
$2x = 1 + 3$
$x = 2$

Verificando:
$3x + 2y = 4$ ---> $3.(2) + 2(-1) = 4$ -----> $6 - 2 = 4$
$2x + 3y = 1$ ---> $2.(2) + 3(-1) = 1$ ------> $4 - 3 = 1$

PROVA COMENTADA 2015

QUESTÃO 01

Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

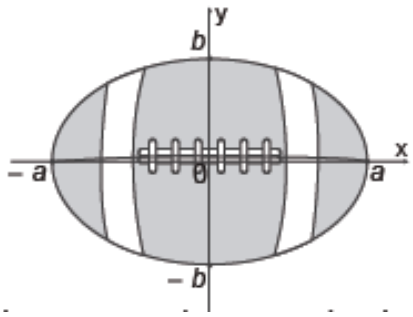
Intervalos de temperatura (°C)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muita Alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classi ficada como

a) muito baixa.
b) baixa.
c) média.
d) alta.
e) muito alta.

QUESTÃO 02

A figura representa a vista superior de uma bola de futebol americano, cuja forma é um elipsoide obtido pela rotação de uma elipse em torno do eixo das abscissas. Os valores *a* e *b* são, respectivamente, a metade do seu comprimento horizontal e a metade do seu comprimento vertical. Para essa bola, a diferença entre os comprimentos horizontal e vertical é igual à metade do comprimento vertical.



Considere que o volume aproximado dessa bola é dado por $V = 4ab^2$.

O volume dessa bola, em função apenas de *b*, é dado por

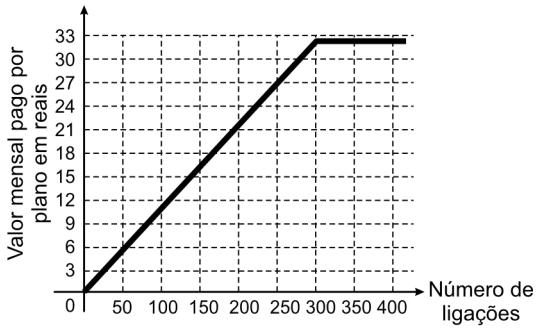
a) $8b^3$
b) $6b^3$
c) $5b^3$
d) $4b^3$
e) $2b^3$

QUESTÃO 03

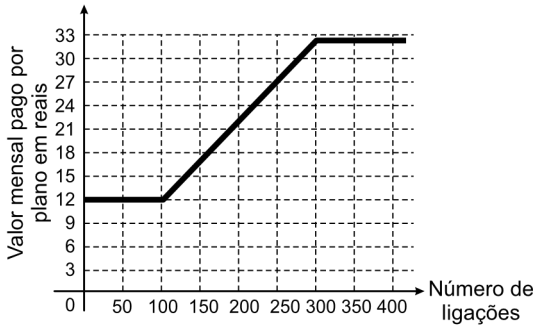
Após realizar uma pesquisa de mercado, uma operadora de telefonia celular ofereceu aos clientes que utilizavam até 500 ligações ao mês o seguinte plano mensal: um valor fixo de R$ 12,00 para os clientes que fazem até 100 ligações ao mês. Caso o cliente faça mais de 100 ligações, será cobrado um valor adicional de R$ 0,10 por ligação, a partir da 101.ª até a 300.ª; e caso realize entre 300 e 500 ligações, será cobrado um valor fixo mensal de R$ 32,00.

Com base nos elementos apresentados, o gráfico que melhor representa a relação entre o valor mensal pago nesse plano e o número de ligações feitas é:

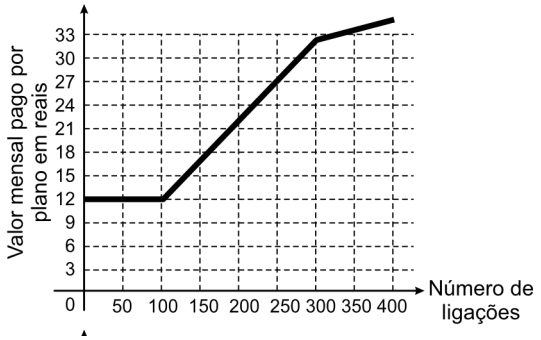
a)



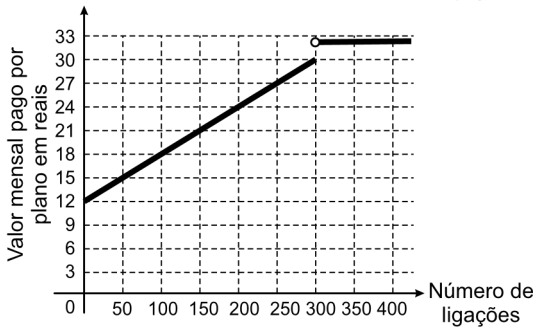
b)



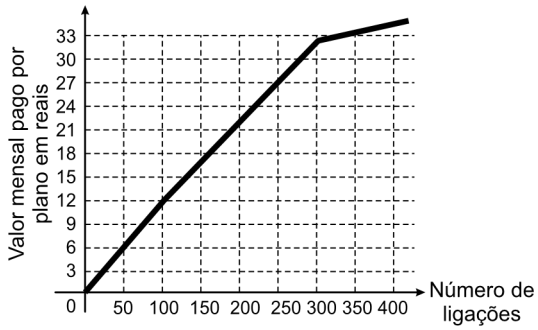
c)



d)



e)



QUESTÃO 04

Um investidor inicia um dia com x ações de uma empresa. No decorrer desse dia, ele efetua apenas dois tipos de operações, comprar ou vender ações.

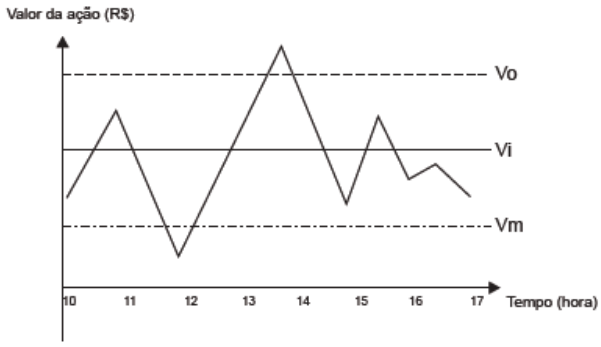
Para realizar essas operações, ele segue estes critérios:

I. vende metade das ações que possui, assim que seu valor fica acima do valor ideal *(Vi)*;

II. compra a mesma quantidade de ações que possui, assim que seu valor fica abaixo do valor mínimo *(Vm)*;

III. vende todas as ações que possui, quando seu valorfica acima do valor ótimo *(Vo)*.

O gráfico apresenta o período de operações e a variação do valor de cada ação, em reais, no decorrer daquele dia e a indicação dos valores ideal, mínimo e ótimo.



Quantas operações o intestidor fez naquele dia?

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

QUESTÃO 05

O tampo de vidro de uma mesa quebrou-se e deverá ser substituído por outro que tenha a forma de círculo. O suporte de apoio da mesa tem o formato de um prisma reto, de base em forma de triângulo equilátero com lados medindo 30 cm.

Uma loja comercializa cinco tipos de tampos de vidro circulares com cortes já padronizados, cujos raios medem 18 cm, 26 cm, 30 cm, 35 cm e 60 cm. O proprietário da mesa deseja adquirir nessa loja o tampo de menor diâmetro que seja suficiente para cobrir a base superior do suporte da mesa.

Considere 1,7 como aproximação para 3 .

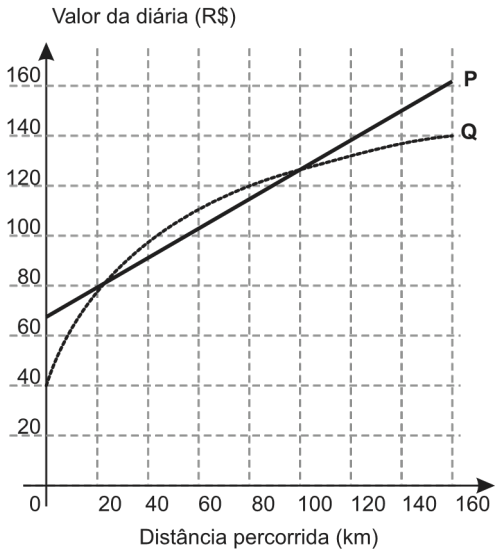
O tampo a ser escolhido será aquele cujo raio, em centímetros, é igual a

a) 18.
b) 26.
c) 30.
d) 35.
e) 60.

QUESTÃO 06

Atualmente existem diversas locadoras de veículos permitindo uma concorrência saudável para o mercado fazendo com que os preços se tornem acessíveis.

Nas locadoras P e Q, o valor da diária de seus carros depende da distância percorrida, conforme o gráfico.



Disponível em: www.sempretops.com.

Acesso em: 7 ago. 2010 O valor pago na locadora Q é menor ou igual àquele pago na locadora P para distâncias, em quilômetros, presentes em qual(is) intervalo(s)? a) De 20 a 100.

b) De 80 a 130.
c) De 100 a 160.
d) De 0 a 20 e de 100 a 160.
e) De 40 a 80 e de 130 a 160.

QUESTÃO 07

Numa cidade, cinco escolas de samba (I, II, III, IV e V) participaram do desfile de Carnaval. Quatro quesitos são julgados, cada um por dois jurados, que podem atribuir somente uma dentre as notas 6, 7, 8, 9 ou 10. A campeã será a escola que obtiver mais pontuação na soma de todas as notas emitidas. Em caso de empate, a campeã será a que alcançar a maior soma das notas atribuídas pelos jurados no quesito Enredo e Harmonia. A tabela mostra as notas do desfile desse ano no momento em que faltava somente a divulgação das notas do jurado B no quesito Bateria.

Quesitos	1. Fantasia e Alegoria		2. Evolução e Conjunto		3. Enredo e Harmonia		4. Bateria		Total
Jurado	A	B	A	B	A	B	A	B	
Escola I	6	7	8	8	9	9	8		55
Escola II	9	8	10	9	10	10	10		66
Escola III	8	8	7	8	6	7	6		50
Escola IV	9	10	10	10	9	10	10		68
Escola V	8	7	9	8	6	8	8		54

Quantas configurações distintas das notas a serem atribuídas pelo jurado B no quesito Bateria tornariam campeã a Escola II?

a) 21
b) 90
c) 750
d) 1250
e) 3125

QUESTÃO 08

Uma carga de 100 contêineres, idênticos ao modelo apresentado na Figura 1, deverá ser descarregada no porto de uma cidade. Para isso, uma área retangular de 10m por 32 m foi cedida para o empilhamento desses contêineres (Figura 2).

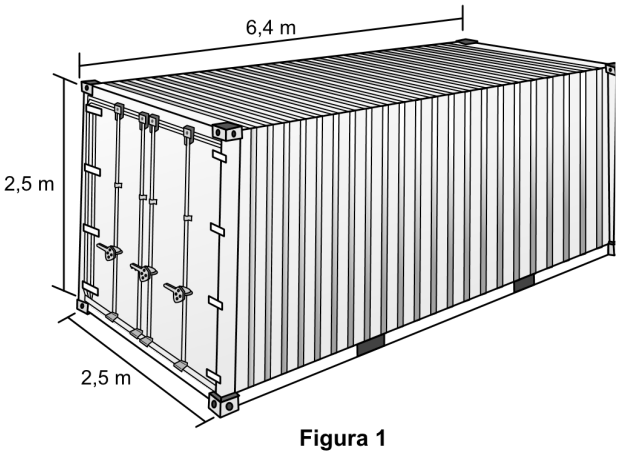


Figura 1

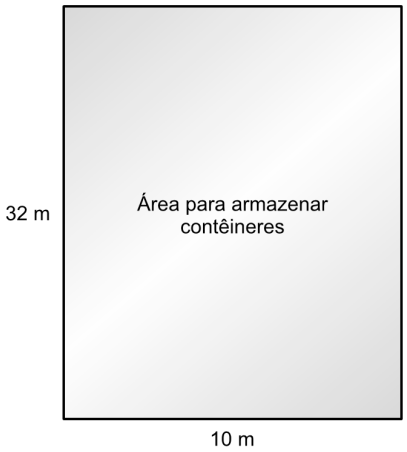


Figura 2

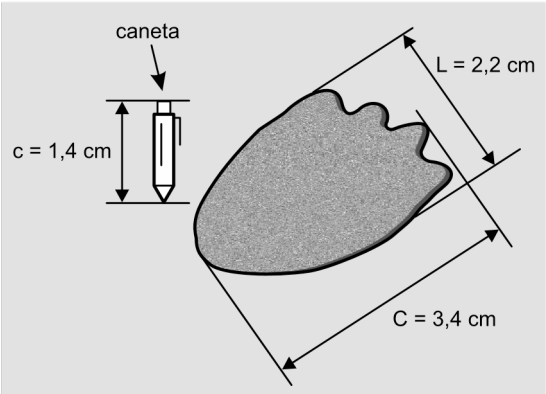
De acordo com as normas desse porto, os contêineres deverão ser empilhados de forma a não sobrarem espaços nem ultrapassarem a área delimitada.

Após o empilhamento total da carga e atendendo à norma do porto, a altura mínima a ser atingida por essa pilha de contêineres é

a) 12,5 m.
b) 17,5 m.
c) 25,0 m.
d) 22,5 m.
e) 32,5 m.

QUESTÃO 09

Um pesquisador, ao explorar uma floresta, fotografou uma caneta de 16,8 cm de comprimento ao lado de uma pegada. O comprimento da caneta (c), a largura (L) e o comprimento (C) da pegada, na fotografia, estão indicados no esquema.



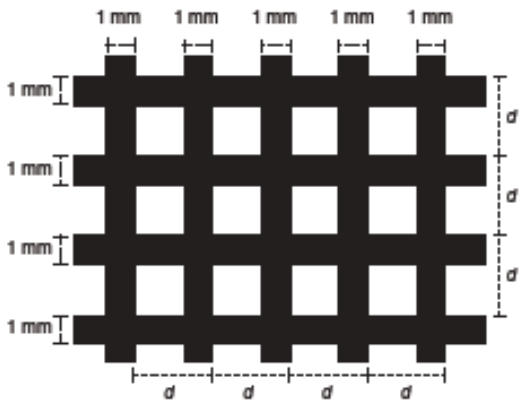
A largura e o comprimento reais da pegada, em centí- metros, são, respectivamente, iguais a

a) 4,9 e 7,6.
b) 8,6 e 9,8.
c) 14,2 e 15,4.
d) 26,4 e 40,8.
e) 27,5 e 42,5.

QUESTÃO 10

Uma indústria produz malhas de proteção solar para serem aplicadas em vidros, de modo a diminuir a passagem de luz, a partir de fitas plásticas entrelaçadas perpendicularmente. Nas direções vertical e horizontal, são aplicadas fitas de 1 milímetro de largura, tal que a distância entre elas é de (d – 1) milímetros, conforme a figura. O material utilizado não permite a passagem da luz, ou seja, somente o raio de luz que atingir as lacunas deixadas pelo entrelaçamento consegue transpor essa proteção.

A taxa de cobertura do vidro é o percentual da área da região coberta pelas fitas da malha, que são colocadas paralelamente às bordas do vidro.



Essa indústria recebeu a encomenda de uma malha de proteção solar para ser aplicada em um vidro retangular de 5 m de largura por 9 m de comprimento. A medida de d, em milímetros, para que a taxa de cobertura da malha seja de 75% é

a) 2

b) 1

c) $\frac{11}{3}$

d) $\frac{4}{3}$

e) $\frac{2}{3}$

QUESTÃO 11

Um arquiteto está reformando uma casa. De modo a contribuir com o meio ambiente, decide reaproveitar tábuas de madeira retiradas da casa. Ele dispõe de 40 tábuas de 540 cm, 30 de 810 cm e 10 de 1 080 cm, todas de mesma largura e espessura. Ele pediu a um carpinteiro que cortasse as tábuas em pedaços de mesmo compri mento, sem deixar sobras, e de modo que as novas peças ficassem com o maior tamanho possível, mas de compri- mento menor que 2 m.

Atendendo o pedido do arquiteto, o carpinteiro deverá produzir

a) 105 peças.
b) 120 peças.
c) 210 peças.
d) 243 peças.
e) 420 peças.

QUESTÃO 12

A insulina é utilizada no tratamento de pacientes com diabetes para o controle glicêmico. Para facilitar sua aplicação, foi desenvolvida uma "caneta" na qual pode ser inserido um refil contendo 3 mL de insulina, como mostra a imagem.

Para controle das aplicações, definiu-se a unidade de insulina como 0,01 mL. Antes de cada aplicação, é necessário descartar 2 unidades de insulina, de forma a retirar possíveis bolhas de ar.

A um paciente foram prescritas duas aplicações diárias: 10 unidades de insulina pela manhã e 10 à noite.

Qual o número máximo de aplicações por refil que o paciente poderá utilizar com a dosagem prescrita?

a) 25
b) 15
c) 13
d) 12
e) 8

QUESTÃO 13

Uma família fez uma festa de aniversário e enfeitou o local da festa com bandeirinhas de papel. Essas ban deirinhas foram feitas da seguinte maneira: inicialmente, recortaram as folhas de papel em forma de quadrado, como mostra a Figura 1. Em seguida, dobraram as folhas quadradas ao meio sobrepondo os lados *BC* e *AD*, de modo que *C* e *D* coincidam, e o mesmo ocorra com A e B, conforme ilustrado na Figura 2. Marcaram os pontos médios *O* e *N*, dos lados *FG* e *AF*, respectiv amente, e o ponto *M* do lado *AD*, de modo que *AM* seja igual a um quarto de *AD*. A seguir, fizeram cortes sobre as linhas pontilhadas ao longo da folha dobrada.

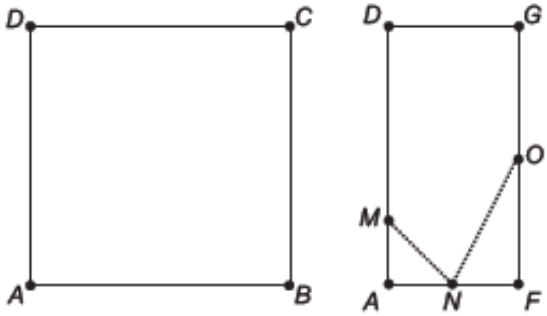


Figura 1 Figura 2

Após os cortes, a folha é aberta e a bandeirinha está pronta.

A figura que representa a forma da bandeirinha pronta é

a)

b)

c)

d)

e)

QUESTÃO 14

Em uma escola, a probabilidade de um aluno compreen der e falar inglês é de 30%. Três alunos dessa escola, que estão em fase final de seleção de intercâmbio, aguardam, em uma sala, serem chamados para uma entrevista. Mas, ao invés de chamá-los um a um, o entrevistador entra na sala e faz, oralmente, uma pergunta em inglês que pode ser respondida por qualquer um dos alunos.

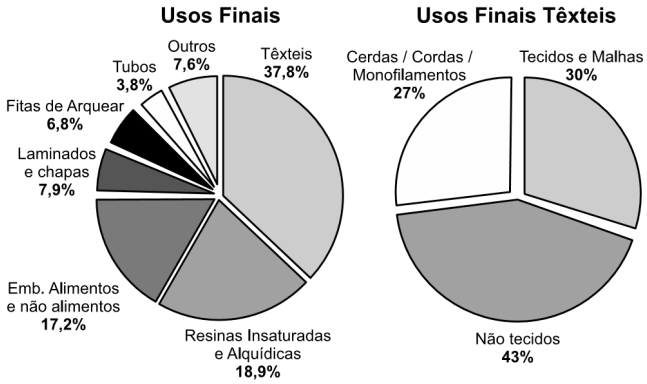
A probabilidade de o entrevistador ser entendido e ter sua pergunta oralmente respondida em inglês é

a) 23,7%
b) 30,0%
c) 44,1%
d) 65,7%
e) 90,0%

QUESTÃO 15

O polímero de PET (Politereftalato de Etileno) é um dos plásticos mais reciclados em todo o mundo devido à sua extensa gama de aplicações, entre elas, fibras têxteis, tapetes, embalagens, filmes e cordas. Os gráficos mostram o destino do PET reciclado no Brasil, sendo que, no ano de 2010, o total de PET reciclado foi de 282 kton (quilotoneladas).

PET RECICLADO - 2010



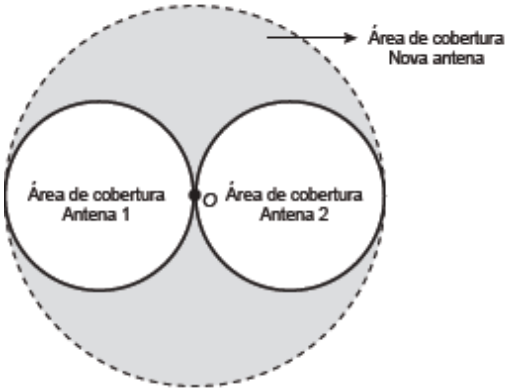
Disponível em: www.abipet.org.br.
Acesso em: 12 jul. 2012 (adaptado).

De acordo com os gráficos, a quantidade de embalagens PET recicladas destinadas à produção de tecidos e malhas, em kton, é mais aproximada de

a) 16,0.
b) 22,9.
c) 32,0.
d) 84,6.
e) 106,6.

QUESTÃO 16

Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão substituídas por uma nova, mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio 2 km, cujas circunferências se tangenciam no ponto O, como mostra a figura.



O ponto O indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tan- genciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores.

Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em a) 8π.

b) 12π.
c) 16π.
d) 32π.
e) 64π.

QUESTÃO 17

Um casal realiza um financiamento imobiliário de R$ 180 000,00, a ser pago em 360 prestações mensais, com taxa de juros efetiva de 1% ao mês. A primeira prestação é paga um mês após a liberação dos recursos e o valor da prestação mensal é de R$ 500,00 mais juro de 1% sobre o saldo devedor (valor devido antes do pa ga mento). Observe que, a cada pagamento, o saldo devedor se reduz em R$ 500,00 e considere que não há prestação em atraso.

Efetuando o pagamento dessa forma, o valor, em reais, a ser pago ao banco na décima prestação é de a) 2 075,00.

b) 2 093,00.
c) 2 138,00.
d) 2 255,00.
e) 2 300,00.

QUESTÃO 18

As exportações de soja do Brasil totalizaram 4,129 mi lhões de toneladas no mês de julho de 2012, e registraram um aumento em relação ao mês de julho de 2011, embora tenha havido uma baixa em relação ao mês de maio de 2012.

Disponível em: www.noticiasagricolas.com.br. Acesso em: 2 ago. 2012.

A quantidade, em quilogramas, de soja exportada pelo Brasil no mês de julho de 2012 foi de

a) $4{,}129 \times 10^{3}$
b) $4{,}129 \times 10^{6}$
c) $4{,}129 \times 10^{9}$
d) $4{,}129 \times 10^{12}$
e) $4{,}129 \times 10^{15}$

QUESTÃO 19

A expressão "Fórmula de Young" é utilizada para calcular a dose infantil de um medicamento, dada a dose do adulto:

$$\text{dose de criança} = \left(\frac{\text{idade da criança (em anos)}}{\text{idade da criança (em anos)} + 12}\right) \cdot \text{dose do adulto}$$

Uma enfermeira deve administrar um medicamento X a uma criança inconsciente, cuja dosagem de adulto é de 60 mg. A enfermeira não consegue descobrir onde está registrada a idade da criança no prontuário, mas identifica que, algumas horas antes, foi administrada a ela uma dose de 14 mg de um medicamento Y, cuja dosagem de adulto é 42 mg. Sabe-se que a dose da medicação Y administrada à criança estava correta.

Então, a enfermeira deverá ministrar uma dosagem do medicamento X, em miligramas, igual a a) 15.

b) 20.
c) 30.
d) 36.
e) 40.

QUESTÃO 20

Segundo dados apurados no Censo 2010, para uma população de 101,8 milhões de brasileiros com 10 anos ou mais de idade e que teve algum tipo de rendimento em 2010, a renda média mensal apurada foi de R$ 1 202,00. A soma dos rendimentos mensais dos 10% mais pobres correspondeu a apenas 1,1 % do total de rendimentos dessa população considerada, enquanto que a soma dos rendimentos mensais dos 10% mais ricos correspondeu a 44,5% desse total.

Disponivel em: www.estadao.com.br. Acesso em: 16 nov. 2011(adaptado).

Qual foi a diferença, em reais, entre a renda média mensal de um brasileiro que estava na faixa dos 10% mais ricos e de um brasileiro que estava na faixa dos 10% mais pobres?

a) 240,40
b) 548,11
c) 1 723,67
d) 4 026,70
e) 5 216,68

QUESTÃO 21

Para o modelo de um troféu foi escolhido um poliedro P, obtido a partir de cortes nos vértices de um cubo. Com um corte plano em cada um dos cantos do cubo, retira-se o canto, que é um tetraedro de arestas menores do que metade da aresta do cubo. Cada face do poliedro P, então, é pintada usando uma cor distinta das demais faces.

Com base nas informações, qual é a quantidade de cores que serão utilizadas na pintura das faces do troféu?

a) 6
b) 8
c) 14
d) 24
e) 30

QUESTÃO 22

Uma padaria vende, em média, 100 pães especiais por dia e arrecada com essas vendas, em média, R$ 300,00. Constatou-se que a quantidade de pães especiais vendidos diariamente aumenta, caso o preço seja reduzido, de acordo com a equação $q = 400 - 100p$, na qual q representa a quantidade de pães especiais vendidos diariamente e p, o seu preço em reais.

A fim de aumentar o fluxo de clientes, o gerente da padaria decidiu fazer uma promoção. Para tanto, modificará o preço do pão especial de modo que a quantidade a ser vendida diariamente seja a maior possível, sem diminuir a média de arrecadação diária na venda desse produto.

O preço p, em reais, do pão especial nessa promoção deverá estar no intervalo

a) R$ 0,50 p < R$ 1,50
b) R$ 1,50 p < R$ 2,50
c) R$ 2,50 p < R$ 3,50
d) R$ 3,50 p < R$ 4,50
e) R$ 4,50 p < R$ 5,50

QUESTÃO 23

O HPV é uma doença sexualmente transmissível. Uma vacina com eficácia de 98% foi criada com o objetivo de prevenir a infecção por HPV e, dessa forma, reduzir o número de pessoas que venham a desenvolver câncer de colo de útero. Uma campanha de vacinação foi lançada em 2014 pelo SUS, para um público-alvo de meninas de 11 a 13 anos de idade. Considera-se que, em uma população não vacinada, o HPV acomete 50% desse público ao longo de suas vidas. Em certo município, a equipe coordenadora da campanha decidiu vacinar meninas entre 11 e 13 anos de idade em quantidade suficiente para que a probabilidade de uma menina nessa faixa etária, escolhida ao acaso, vir a desenvolver essa doença seja, no máximo, de 5,9%. Houve cinco propostas de cobertura, de modo a atingir essa meta:

Proposta I: vacinação de 90% do público-alvo.
Proposta 11: vacinação de 55,8% do público-alvo.
Proposta 111: vacinação de 88,2% do público-alvo.
Proposta IV: vacinação de 49% do público-alvo.
Proposta V: vacinação de 95,9% do público-alvo.

Para diminuir os custos, a proposta escolhida deveria ser também aquela que vacinasse a menor quantidade possível de pessoas.

Disponível em: www.virushpv.com.br. Acessoem: 30 ago. 2014 (adaptado)

A proposta implementada foi a de número

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

QUESTÃO 24

O acréscimo de tecnologias no sistema produtivo industrial tem por objetivo reduzir custos e aumentar a produtividade. No primeiro ano de funcionamento, uma indústria fabricou 8 000 unidades de um determinado produto. No ano seguinte, investiu em tecnologia adquiri- do novas máquinas e aumentou a produção em 50%. Estima-se que esse aumento percentual se repita nos próximos anos, garantindo um crescimento anual de 50%.

Considere P a quantidade anual de produtos fabricados no ano t de funcionamento da indústria.

Se a estimativa for alcançada, qual é a expressão que determina o número de unidades produzidas P em função de t, para t 1?

a) $P(t) = 0,5 \cdot t^{-1} + 8\,000$
b) $P(t) = 50 \cdot t^{-1} + 8\,000$
c) $P(t) = 4\,000 \cdot t^{-1} + 8\,000$
d) $P(t) = 8\,000 \cdot (0,5)^{t-1}$
e) $P(t) = 8\,000 \cdot (1,5)^{t-1}$

QUESTÃO 25

Em uma seletiva para a final dos 100 metros livres de natação, numa olimpíada, os atletas, em suas respectivas raias, obtiveram os seguintes tempos:

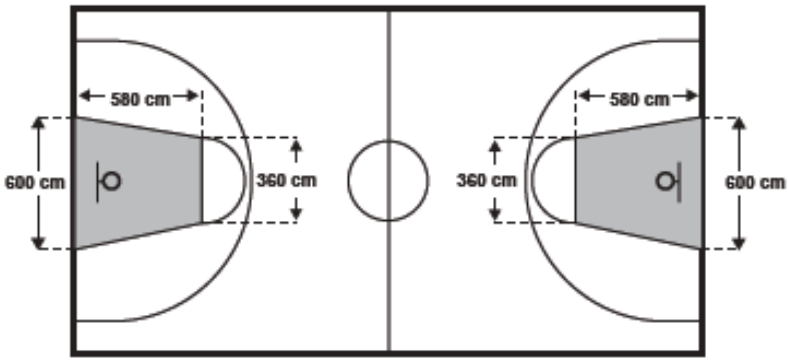
Raia	1	2	3	4	5	6	7	8
Tempo (segundo)	20,90	20,90	20,50	20,80	20,60	20,60	20,90	20,96

A mediana dos tempos apresentados no quadro é

a) 20,70.
b) 20,77.
c) 20,80.
d) 20,85.
e) 20,90.

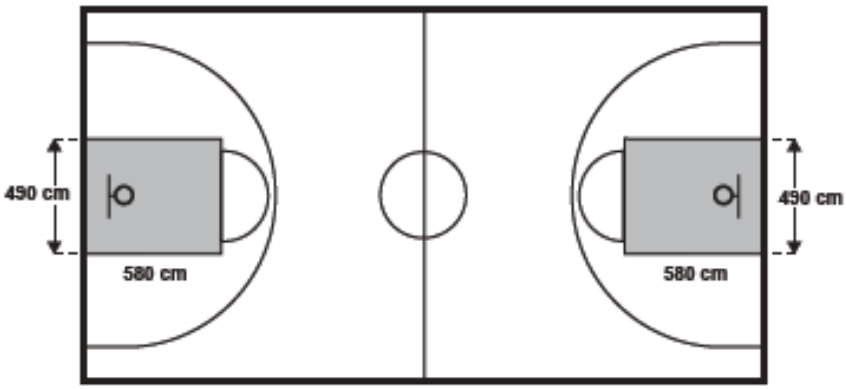
QUESTÃO 26

O Esquema I mostra a configuração de uma quadra de basquete. Os trapézios em cinza, chamados de garrafões, correspondem a áreas restritivas.



Esquema I: área restritiva antes de 2010

Visando atender as orientações do Comitê Central da Federação Internacional de Basquete (Fiba) em 2010, que unificou as marcações das diversas ligas, foi prevista uma modificação nos garrafões das quadras, que passariam a ser retângulos, como mostra o Esquema II.



Esquema II: área restritiva a partir de 2010

Após executadas as modificações previstas, houve uma alteração na área ocupada por cada garrafão, que corresponde a um(a)

a) aumento de 5 800 cm^2.
b) aumento de 75400 cm^2.
c) aumento de 214 600 cm^2.
d) diminuição de 63 800 cm^2.
e) diminuição de 272 600 cm^2.

QUESTÃO 27

O gerente de um cinema fornece anualmente ingressos gratuitos para escolas. Este ano serão distribuídos 400 ingressos para uma sessão vespertina e 320 ingressos para uma sessão noturna de um mesmo filme. Várias escolas podem ser escolhidas para receberem ingressos. Há alguns critérios para a distribuição dos ingressos:

1) cada escola deverá receber ingressos para uma única sessão;
2) todas as escolas contempladas deverão receber o mesmo número de ingressos;
3) não haverá sobra de ingressos (ou seja, todos os ingressos serão distribuídos).

O número mínimo de escolas que podem ser escolhidas para obter ingressos, segundo os critérios estabelecidos, é

a) 2.
b) 4.
c) 9.
d) 40.
e) 80.

QUESTÃO 28

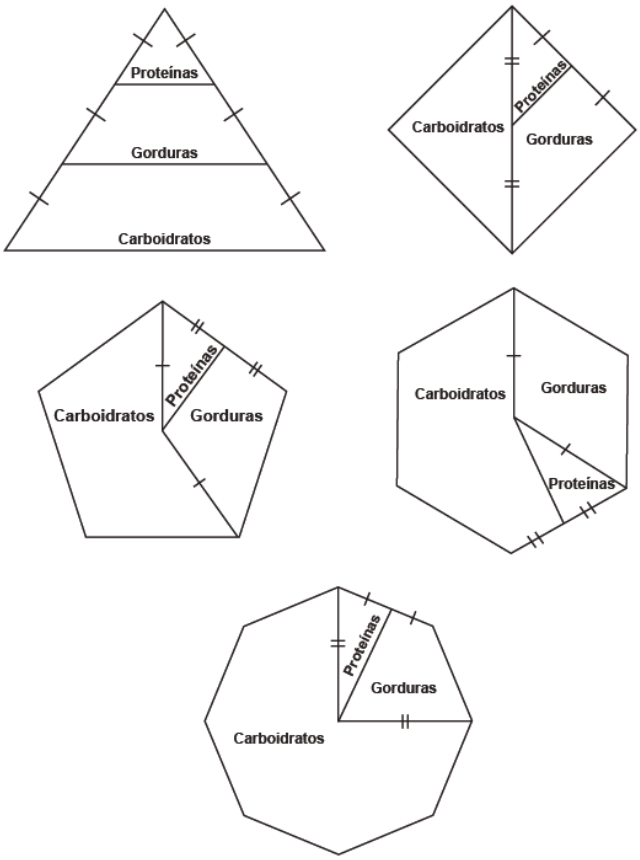
Para resolver o problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião do condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilín- drico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar 81 m^3 de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura da atual. Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada. Utilize 3,0 como aproximação para π.

Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado? a) 0,5

b) 1,0
c) 2,0
d) 3,5
e) 8,0

QUESTÃO 29

Para uma alimentação saudável, recomenda-se ingerir, em relação ao total de calorias diárias, 60% de carboidratos, 10% de proteínas e 30% de gorduras. Uma nutricionista, para melhorar a visualização dessas porcentagens, quer dispor esses dados em um polígono. Ela pode fazer isso em um triângulo equilátero, um losango, um pentágono regular, um hexágono regular ou um octógono regular, desde que o polígono seja dividido em regiões cujas áreas sejam proporcionais às porcentagens mencionadas. Ela desenhou as seguintes figuras:

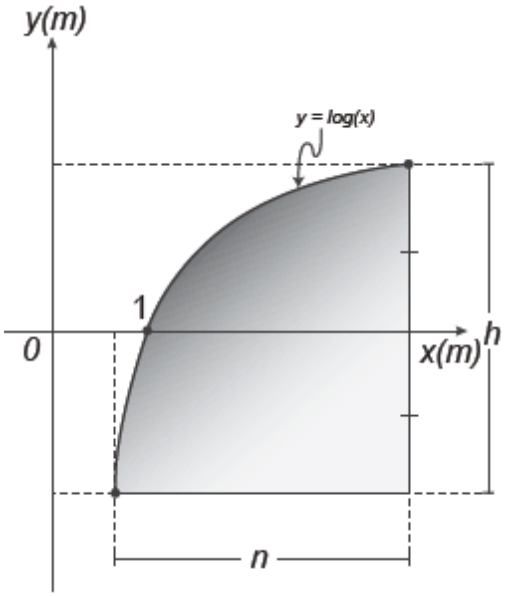


Entre esses polígonos, o único que satisfaz as condições necessárias para representar a ingestão correta de diferentes tipos de alimentos é o

a) triângulo.
b) losango.
c) pentágono.
d) hexágono.
e) octógono.

QUESTÃO 30

Um engenheiro projetou um automóvel cujos vidros das portas dianteiras foram desenhados de forma que suas bordas superiores fossem representadas pela curva de equação y = log (x), conforme a figura.



A forma do vidro foi concebida de modo que o eixo x sempre divida ao meio a altura h do vidro e a base do vidro seja paralela ao eixo x. Obedecendo a essas condições, o engenheiro determinou uma expressão que fornece a altura h do vidro em função da medida n de sua base, em metros.

A expressão algébrica que determina a altura do vidro é

a) $\log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right) - \log\left(\frac{n-\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

b) $\log\left(1+\frac{n}{2}\right) - \log\left(1-\frac{n}{2}\right)$

c) $\log\left(1+\frac{n}{2}\right) + \log\left(1-\frac{n}{2}\right)$

d) $\log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

e) $2\log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

QUESTÃO 31

Um concurso é composto por cinco etapas. Cada etapa vale 100 pontos. A pontuação final de cada candidato é a média de suas notas nas cinco etapas. A classificação obedece à ordem decrescente das pontuações finais. O critério de desempate baseia-se na maior pontuação na quinta etapa.

Candidato	Média nas quatro primeiras etapas	Pontuação na quinta etapa
A	90	60
B	85	85
C	80	95
D	60	90
E	60	100

A ordem de classificação final desse concurso é

a) A, B, C, E, D.
b) B, A, C, E, D.
c) C, B, E, A, D.
d) C, B, E, D, A.
e) E, C, D, B, A.

QUESTÃO 32

O índice pluviométrico é utilizado para mensurar a precipitação da água da chuva, em milímetros, em determinado período de tempo. Seu cálculo é feito de acordo com o nível de água da chuva acumulada em 1 m^2, ou seja, se o índice for de 10 mm, significa que a altura do nível de água acumulada em um tanque aberto, em formato de um cubo com 1 m^2 de área de base, é de 10 mm. Em uma região, após um forte temporal, verificou-se que a quantidade de chuva acumulada em uma lata de formato cilíndrico, com raio 300 mm e altura 1 200 mm, era de um terço da sua capacidade.

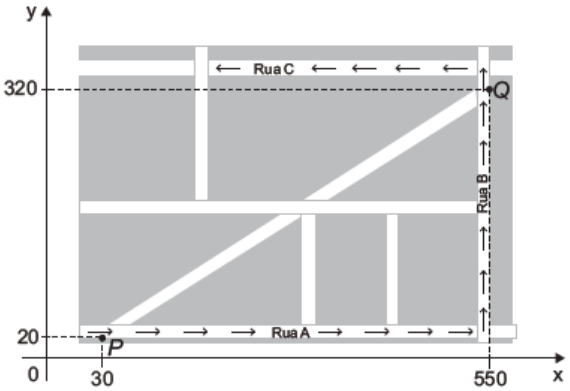
Utilize 3,0 como aproximação para π.

O índice pluviométrico da região, durante o período do temporal, em milímetros, é de a) 10,8.

b) 12,0.
c) 32,4.
d) 108,0.
e) 324,0.

QUESTÃO 33

Devido ao aumento do fluxo de passageiros, uma empresa de transporte coletivo urbano está fazendo estudos para a implantação de um novo ponto de parada em uma determinada rota. A figura mostra o percurso, indicado pelas setas, realizado por um ônibus nessa rota e a localização de dois de seus atuais pontos de parada, representados por P e Q.



Os estudos indicam que o novo ponto T deverá ser instalado, nesse percurso, entre as paradas já existentes P e Q, de modo que as distâncias percorridas pelo ônibus entre os pontos P e T e entre os pontos T e Q sejam iguais. De acordo com os dados, as coordenadas do novo ponto de parada são

a) (290; 20).
b) (410;0).
c) (410; 20).
d) (440; 0).
e) (440; 20).

QUESTÃO 34

Deseja-se comprar lentes para óculos. As lentes devem ter espessuras mais próximas possíveis da medida 3 mm.

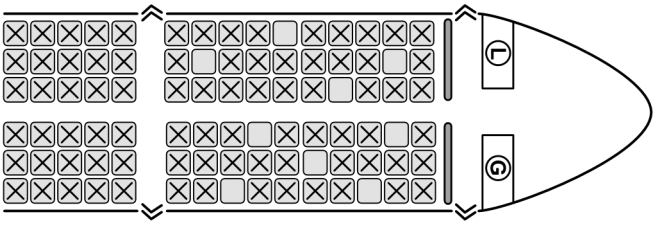
No estoque de uma loja, há lentes de espessuras: 3,10 mm; 3,021 mm; 2,96 mm; 2,099 mm e 3,07 mm.

Se as lentes forem adquiridas nessa loja, a espessura escolhida será, em milímetros, de a) 2,099.

b) 2,96.
c) 3,021.
d) 3,07.
e) 3,10.

QUESTÃO 35

Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o *site* de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo *site*, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



Disponível em: www.gebh.net. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por

a) $\dfrac{9!}{2!}$

b) $\dfrac{9!}{7! \times 2!}$

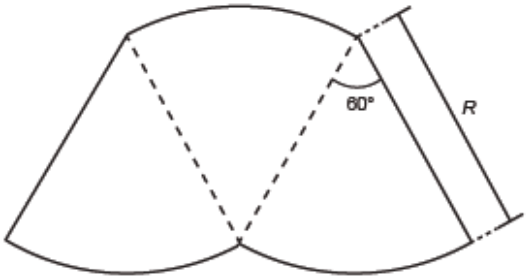
c) $7!$

d) $\dfrac{5!}{2!} \times 4!$

e) $\dfrac{5!}{4!} \times \dfrac{4!}{3!}$

QUESTÃO 36

O proprietário de um parque aquático deseja construir uma piscina em suas dependências. A figura representa a vista superior dessa piscina, que é formada por três setores circulares idênticos, com ângulo central igual a 60°. O raio *R* deve ser um número natural.



O parque aquático já conta com uma piscina em formato retangular com dimensões 50 m x 24 m.

O proprietário quer que a área ocupada pela nova piscina seja menor que a ocupada pela piscina já existente.

Considere 3,0 como aproximação para π. O maior valor possível para *R*, em metros, deverá ser a) 16.
b) 28.
c) 29.
d) 31.
e) 49.

QUESTÃO 37

Alguns exames médicos requerem uma ingestão de água maior do que a habitual. Por recomendação médica, antes do horário do exame, uma paciente deveria ingerir 1 copo de água de 150 mililitros a cada meia hora, durante as 10 horas que antecederiam um exame. A paciente foi a um supermercado comprar água e verificou que havia garrafas dos seguintes tipos: Garrafa I: 0,15 litro

Garrafa II: 0,30 litro

Garrafa III: 0,75 litro Garrafa IV: 1,50 litro Garrafa V: 3,00 litros

A paciente decidiu comprar duas garrafas do mesmo tipo, procurando atender à recomendação médica e, ainda, de modo a consumir todo o líquido das duas garrafas antes do exame.

Qual o tipo de garrafa escolhida pela paciente? a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

QUESTÃO 38

Alguns medicamentos para felinos são administra- dos com base na superfície corporal do animal. Foi receitado a um felino pesando 3,0 kg um medicamento na dosagem diária de 250 mg por metro quadrado de superfície corporal.

O quadro apresenta a relação entre a massa do felino, em quilogramas, e a área de sua superfície corporal, em metros quadrados.

Relação entre a massa de um felino e a área de sua superfície corporal

Massa (kg)	Área (m^2)
1,0	0,100
2,0	0,159
3,0	0,208
4,0	0,252
5,0	0,292

NORSWORTHY, G. D. **O paciente felino**. São Paulo: Roca, 2009.

A dose diária, em miligramas, que esse felino deverá receber é de a) 0,624.
b) 52,0.
c) 156,0.
d) 750,0.
e) 1 201,9.

QUESTÃO 39

Para economizar em suas contas mensais de água, uma família de 10 pessoas deseja construir um reservatório para armazenar a água captada das chuvas, que tenha capacidade suficiente para abastecer a família por 20 dias. Cada pessoa da família consome, diariamente, 0,08 m^3 de água.

Para que os objetivos da família sejam atingidos, a capacidade mínima, em litros, do reservatório a ser construído deve ser
a) 16.
b) 800.
c) 1600.
d) 8 000.
e) 16 000.

QUESTÃO 40

Uma competição esportiva envolveu 20 equipes com 10 atletas cada. Uma denúncia à organização dizia que um dos atletas havia utilizado substância proibida.

Os organizadores, então, decidiram fazer um exame *antidoping*. Foram propostos três modos diferentes para escolher os atletas que irão realizá-lo:

Modo I: sortear três atletas dentre todos os participantes;

Modo II: sortear primeiro uma das equipes e, desta, sortear três atletas;

Modo III: sortear primeiro três equipes e, então, sortear um atleta de cada uma dessas três equipes.

Considere que todos os atletas têm igual probabilidade de serem sorteados e que P(I), P(II) e P(III) sejam as probabilidades de o atleta que utilizou a substância proibida seja um dos escolhidos para o exame no caso do sorteio ser feito pelo modo I, II ou III. Comparando-se essas probabilidades, obtém-se
a) P(I) < P(III) < P(II)
b) P(II) < P(I) < P(III)
c) P(I) < P(II) = P(III)
d) P(I) = P(II) < P(III)
e) P(I) = P(II) = P(III)

QUESTÃO 41

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

A partir de uma série histórica, observou-se que o preço *P*, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$, onde x representa o mês do ano, sendo x = 1 associado ao mês de janeiro, x = 2 ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até x = 12 associado ao mês de dezembro.

Disponível em: www.ibge.gov.br.Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é a) janeiro.
b) abril.
c) junho.
d) julho.
e) outubro.

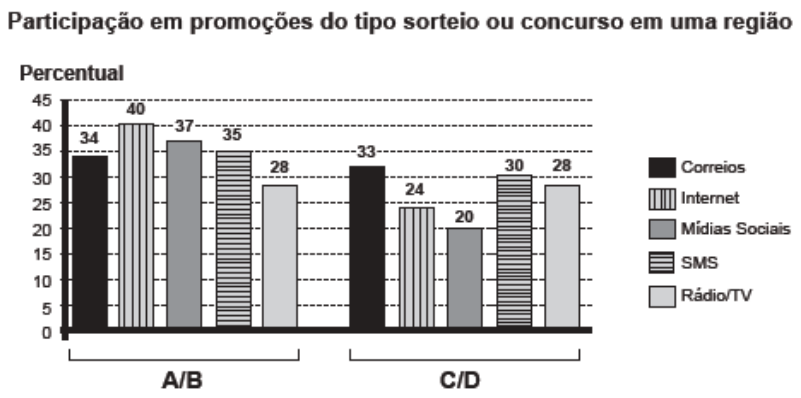
QUESTÃO 42

No contexto da matemática recreativa, utilizando diversos materiais didáticos para motivar seus alunos, uma professora organizou um jogo com um tipo de baralho modificado, No início do jogo, vira-se uma carta do baralho na mesa e cada jogador recebe em mãos nove cartas. Deseja-se formar pares de cartas, sendo a primeira carta a da mesa e a segunda, uma carta na mão do jogador, que tenha um valor equivalente àquele descrito na carta da mesa. O objetivo do jogo é verificar qual jogador consegue o maior número de pares. Iniciado o jogo, a carta virada na mesa e as cartas da mão de um jogador são como no esquema:

Segundo as regras do jogo, quantas cartas da mão desse jogador podem formar um par com a carta da mesa? a) 9
b) 7
c) 5
d) 4
e) 3

QUESTÃO 43

Uma pesquisa de mercado foi realizada entre os consumidores das classes sociais A, B, C e D que costumam participar de promoções tipo sorteio ou concurso. Os dados comparativos, expressos no gráfico, revelam a participação desses consumidores em cinco categorias: via Correios (juntando embalagens ou recor tando códigos de barra), via internet (cadastrando-se no *site* da empresa/marca promotora), via mídias sociais (redes sociais), via SMS (mensagem por celular) ou via rádio/Tv.



Uma empresa vai lançar uma promoção utilizando apenas uma categoria nas classes A e B (A/B) e uma categoria nas classes C e D (C/D). De acordo com o resultado da pesquisa, para atingir o maior número de consumidores das classes A/B e C/D, a empresa deve realizar a promoção, respectivamente, via a) Correios e SMS,

b) internet e Correios.
c) internet e internet.
d) internet e mídias sociais.
e) rádio/TV e rádio/TV.

QUESTÃO 44

Uma fábrica de sorvetes utiliza embalagens plásticas no formato de paralelepípedo retangular reto. Internamente, a embalagem tem 10 cm de altura e base de 20 cm por 10 cm. No processo de confecção do sorvete, uma mistura é colocada na embalagem no estado líquido e, quando levada ao congelador, tem seu volume aumentado em 25%, ficando com consistência cremosa.

Inicialmente é colocada na embalagem uma mistura sabor chocolate com volume de 1 000 cm^3 e, após essa mistura ficar cremosa, será adicionada uma mistura sabor morango, de modo que, ao final do processo de conge lamento, a embalagem fique completamente preenchida com sorvete, sem transbordar.

O volume máximo, em cm^3, da mistura sabor morango que deverá ser colocado na embalagem é

a) 450.
b) 500.
c) 600.
d) 750.
e) 1000.

QUESTÃO 45

Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso. Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

a) $\frac{1}{100}$

b) $\frac{19}{100}$

c) $\frac{20}{100}$

d) $\frac{21}{100}$

e) $\frac{80}{100}$

RESOLUÇÃO 01

Se $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, a maior temperatura T é dada por

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{222 - 4 \cdot (-1) \cdot (-85)}{4 \cdot (-1)} = -\frac{484 - 340}{-4} = 36$$

$T = 36 \Rightarrow 30 \leq T \leq 43 \Rightarrow$ classificação: alta.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO 02

Do enunciado: $2a - 2b = b \Leftrightarrow a = \frac{3b}{2}$

$V = 4 \cdot a \cdot b^2$ e $a = \frac{3b}{2} \Leftrightarrow V = 4 \cdot \frac{3b}{2} b^2 = 6b^3$

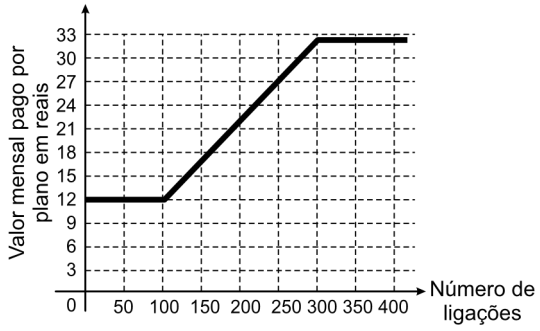
RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO 03

Com base nos elementos apresentados, temos:

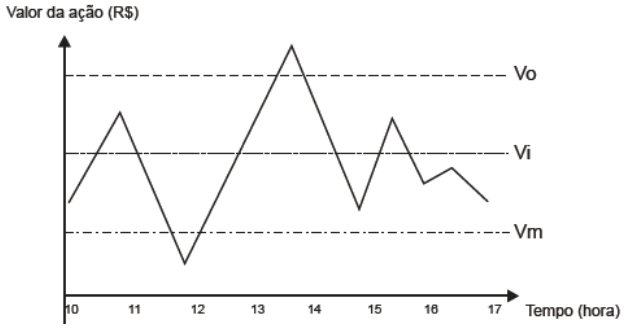
número de ligações	valor cobrado, em reais
$x \leq 100$	12
$100 < x \leq 300$	$12 + (x - 100) \cdot 0{,}10$
$300 < x \leq 500$	32

Assim, o gráfico é do tipo:



RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO 04



As operações feitas pelo investidor ocorrem nos instantes imediatamentes posteriores a t_1 (critério I), t_2 (critério II), t_3 (critério I) e t_4 (critério III). Assim, o total de operações realizadas pelo investidor é 4 (quatro).

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO 05

Sejam R_T o raio do tampo e R o raio do círculo, ambos em cm, circunscrito ao triângulo equilátero de lado $\ell = 30$ cm.

De acordo com o enunciado,

$$R_T \geq R \Rightarrow R_T \geq \frac{\ell\sqrt{3}}{3} \Rightarrow R_T \geq \frac{30.1{,}7}{3} \Leftrightarrow R_T \geq 17$$

Entre os cortes já padronizados, o tampo de menor diâmetro tem raio 18 cm.

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO 06

O valor pago na locadora Q é menor que o pago na locadora P quando o gráfico de Q ficar abaixo de P e igual na intersecção.

Assim, temos de 0 a 20 e de 100 a 160.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO 07

1) As escolas I, III e V não podem ser campeãs, pois o número máximo de pontos que podem conseguir é 65, 60 e 64, respectivamente.

2) Em caso de empate, a escola II será campeã, pois ganha no quesito enredo e harmonia.

3) A escola II será campeã se as pontuações de II e IV forem:

Escola II	Escola IV
10	8
10	7
10	6
9	7
9	6
8	6

4) Em cada uma dessas 6 possibilidades, as outras 3 escolas podem ser avaliadas de 5 possíveis maneiras.

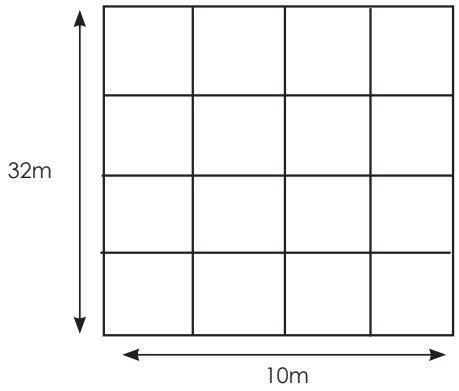
5) O número de configurações possíveis é, pois: 6 . 5 . 5 . 5 = 750

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO 08

1) Observando que 32 ÷ 6,4 = 5 e 10 ÷ 2,5 = 4, cada "camada", na área de armazenamento, comporta 5 x 4 = 20 contêiners.

2) Para armazenar 100 contêineres, serão necessárias (e suficientes) 5 "camadas", pois 100 ÷ 20 = 5



3) Após o empilhamento total da carga, a altura mínima a ser atingida é 5 . 2,5 m = 12,5 m.

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO 09

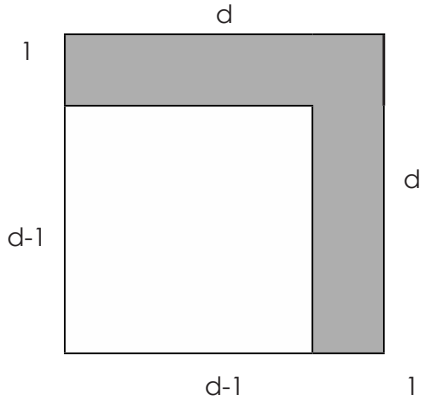
1) Se o comprimento real da caneta é 16,8 cm e o comprimento c dela na fotografia é 1,4 cm, então a razão de semelhança é $\frac{16,8}{1,4} = 12$

2) A largura da pegada é (2,2 cm) 12 = 26,4 cm

3) O comprimento da pegada é (3,4 cm) 12 = 40,8 cm

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO 10



Para cada quadrado de *d* por *d* da malha, apenas uma área de (d – 1) por (d – 1) permite a passagem de luz. Como a taxa de cobertura é 75%, apenas 25% da luz incidente deverá passar.

Assim, sendo d > 1, temos:

$$\frac{(d-1)^2}{d^2} = 25\% \Leftrightarrow \left(\frac{d-1}{d}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{d-1}{d} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2d - 2 = d \Leftrightarrow d = 2$$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO 11

Como 540 = $2^2 . 3^3 . 5^1$, 810 = $2^1 . 3^4 . 5^1$ e 1080 = $2^3 . 3^3 . 5^1$, o máximo divisor comum entre os três é $2 . 3^3 . 5$ = 270.

O comprimento de cada peça deverá ser divisor de 270 cm e, como deve ser o maior possível e menor que 2 m (200 cm), será de 135 cm.

A quantidade de peças obtidas foi

(40 . 540 + 30 . 810 + 10 . 1080) 135 = 420

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO 12

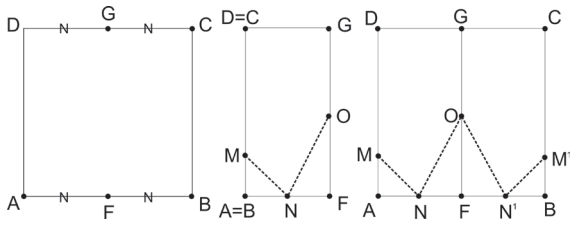
Em cada aplicação, serão utilizadas 12 unidades de insulina (10 como dose prescrita mais 2 para retirar as bolhas de ar). Desta forma, para cada aplicação, é necessário 0,12 mL de insulina.

Assim, em um refil de 3 mL, são possíveis

$$\frac{3 \text{ mL}}{0,12 \text{ mL}} = 25 \text{ aplicações}$$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO 13



RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO 14

A probabilidade de nenhum dos três alunos responder à pergunta feita pelo entrevistador é

70% . 70% . 70% = 0,70 . 0,70 . 0,70 = 0,343 = 34,3%

A probabilidade de o entrevistador ser entendido e ter sua pergunta respondida em inglês é:

100% – 34,3% = 65,7%

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO 15

De acordo com os gráficos, a quantidade de embalagens PET recicladas destinadas à produção de tecidos e malhas, em kt (e não kton, como está no enunciado), é

37,8% . 30% . 282 = 31, 9788 ≅ 32,00

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO 16

Todas as áreas calculadas a seguir estão em quilôme tros quadrados.

A área coberta pelas antenas antigas era:

$S_A = 2\pi . 2^2 = 8\pi$

A área coberta pela nova antena é:

$S_N = \pi . 4^2 = 16\pi$

A área de cobertura foi ampliada em $16\pi - 8\pi = 8\pi$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO 17

Na décima prestação, o saldo devedor é, em reais, de

180000 – 9 . 500 = 175500

O juro de 1% sobre este valor resulta em:

1% . 175 500 = 1755

Assim, a décima prestação é, em reais, de

500 + 1755 = 2255

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO 18

4,129 milhões de toneladas = $4,129 . 10^6 . 10^3$ kg = = $4,129 . 10^9$kg Resposta:

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO 19

Do prontuário, a enfermeira verifica que

$$14mg = \frac{x}{x + 12} . 42 \text{ mg},$$

sendo x a idade da criança.

Assim,

$$14 = \frac{x}{x + 12} . 42, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14x + 14 . 12 = 42x \Leftrightarrow 28x = 14 . 12 \Leftrightarrow x = 6$$

Assim, a dosagem do medicamento X deverá ser, em miligramas, de

$$\frac{6}{6+12} . 60 = \frac{360}{18} = 20$$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO 20

A receita gerada pela população p = 101,8 milhões de brasileiros com 10 anos ou mais de idade e que teve algum tipo de rendimento em 2010 foi R$ 1 202,00. p. A receita gerada pelos 10% mais pobres foi de 1,1% . R$ 1 202,00 . p e a renda média mensal de um brasileiro nesta faixa foi de

$$\frac{1,1\% . R\$ 1\,202,00 . p}{10\%.p} = R\$ 132,22$$

A receita gerada pelos 10% mais ricos foi de 44,5% . R$ 1 202,00 . p e a renda média mensal de um brasileiro nesta faixa de renda foi de

$$\frac{44,5\% . R\$ 1\,202,00 . p}{10\% . p} = R\$ 5\,348,90$$

A diferença, em reais, entre as rendas médias dos brasileiros que estavam nas duas faixas foi 5 348,90 – 132,22 = 5 216, 68

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO 21

Ao retirarmos de cada canto de um cubo um tetraedro cujas arestas são menores que a metade da aresta do cubo, obtemos um sólido com 6 faces octogonais e 8 faces triangulares.

Assim, se cada face será pintada com uma cor dife- rente das demais, serão necessárias (6 + 8) cores = 14 cores.

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO 22

Se o preço é p e a quantidade de pães vendida é q = 400 – 100p, a arrecadação média, em reais, em função do preço p, é dada por R (p) = (400 – 100p) . p Para que esta arrecadação seja de R$ 300,00, deve-se ter:

$(400 - 100p) . p = 300 \Leftrightarrow 4p - p^2 = 3 \Leftrightarrow p^2 - 4p + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p = 1$ ou $p = 3$

R$ 300,00

O preço atual é de R$ 3,00, pois $\frac{R\$ 300,000}{100}$ = R$

Para manter a arrecadação, o preço deverá ser baixado para R$ 1,00 (R$ 0,50 < R$ 1,00 < R$ 1,50)

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO 23

Seja p a quantidade de meninas que compõe o público-alvo deste município e x a porcentagem deste público-alvo a ser vacinada.

A quantidade de meninas previstas a desenvolver a doença é

$50\% \cdot (2\% \cdot x \cdot p + (1 - x) \cdot p) = 5{,}9\%\ p$

$\Leftrightarrow 0{,}50 \cdot (0{,}02\,x + 1 - x) = 0{,}059 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - 0{,}98x = \dfrac{0{,}059}{0{,}50} \Leftrightarrow 1 - 0{,}98x = 0{,}118 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{0{,}882}{0{,}98} = 0{,}90 = 90\%$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO 24

O número de unidades produzidas P, em função de t, corresponde, em cada ano, aos termos de uma pro- gres são geométrica de primeiro termo $a_1 = 8000$ uni dades e razão q = 1,5.

Logo, a expressão que determina esse número de uni dades é $p = 8000 \cdot (1{,}5)^{t-1}$.

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO 25

Em ordem crescente, os tempos, em segundos, são 20,50; 20,60; 20,60; *20,80; 20,90*, 20,90; 20,90 e 20,96.

Os dois termos centrais deste rol são 20,80 e 20,90 e, portanto, a mediana é $\dfrac{20{,}80 + 20{,}90}{2} = 20{,}85$.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO 26

I) A área do trapézio do esquema I, em cm², é

$$\frac{(600 + 360) \cdot 580}{2} = 278400$$

II) A área do retângulo do esquema II, em cm², é $580 \cdot 490 = 284200$

III) O aumento da área, em cm², foi de $284200 - 278\,400 = 5800$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO 27

I) m.d.c. (400; 320) = 80, pois

	1	4
400	320	80
80	0	

Cada escola será contemplada com 80 ingressos;assim, os 720 ingressos serão distribuídos para 9 es colas.

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO 28

I) A cisterna atual tem 1 m de raio na base e 3 m de altura.

II) A nova cisterna deverá ter 81 m³ de volume, 3 m de altura e raio R, em metros, tal que

$\pi \cdot R^2 \cdot 3 = 81$; assim, para $\pi = 3$, deve-se ter:

$3 \cdot R^2 \cdot 3 = 81 \Leftrightarrow R^2 = 9 \Leftrightarrow R = 3$

III) O aumento, em metros, no raio da cisterna deveser $3 - 1 = 2$

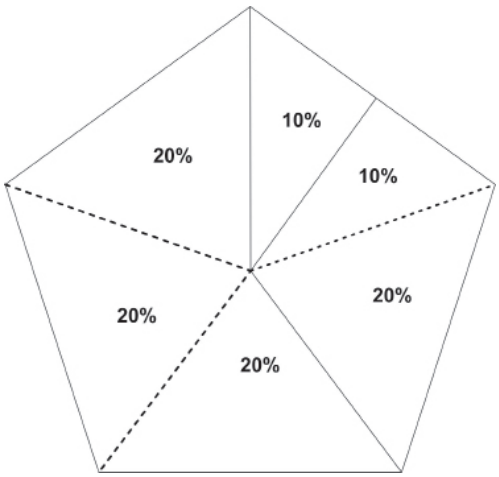
RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO 29

O polígono regular deve ter sua área distribuída conforme a tabela:

Carboidratos	60%
Gorduras	30%
Proteínas	10%

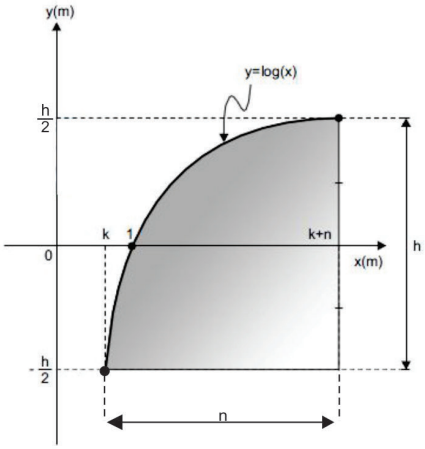
Dividindo o pentágono regular em 5 triângulos congruentes, cada um com 20% da área do pentágono, tem-se:



Assim, a distribuição das áreas correspondentes é:
Carboidratos: 20% + 20% + 20% = 60%
Gorduras: 20% + 10% = 30% Proteínas: 10%

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO 30



$$\text{I)}\ \begin{cases} \log(K+n) = \dfrac{h}{2} \\ \log K = -\dfrac{h}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = = 2.\log(k+n) \\ h = -2.\log k \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \,.\, \log(k+n) = -2 \,.\, \log k \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log(k+n) = -\log k \Leftrightarrow \log(k+n) + \log k = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log[(k+n) \,.\, k] = 0 \Leftrightarrow (k+n)k = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k^2 + nk - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{-n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}, \text{ pois } k > 0$$

$$\text{II)}\ h = 2 \,.\, \log(k+n) = 2 \,.\, \log\left(\frac{-n + \sqrt{n^2+4}}{2} + n\right) =$$

$$= 2 \,.\, \log\left(\frac{n + \sqrt{n^2+4}}{2}\right)$$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO 31

Sendo a pontuação final de cada candidato a média de suas notas nas cinco etapas, temos:

Candidato	Média nas quatro primeiras etapas	Pontuação na quinta etapa	Pontuação final
A	90	60	$\frac{4 \,.\, 90 + 60}{5} = 84$
B	85	85	$\frac{4 \,.\, 85 + 85}{5} = 85$
C	80	95	$\frac{4 \,.\, 80 + 95}{5} = 83$
D	60	90	$\frac{4 \,.\, 60 + 90}{5} = 66$
E	60	100	$\frac{4 \,.\, 60 + 100}{5} = 68$

Logo, a ordem de classificação final desse concurso é: B, A, C, E e D.

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO 32

I) O volume de chuva acumulado nesta lata cilíndrica, com raio 300 mm, altura 1200 mm e ocupando um terço de sua capacidade, é:

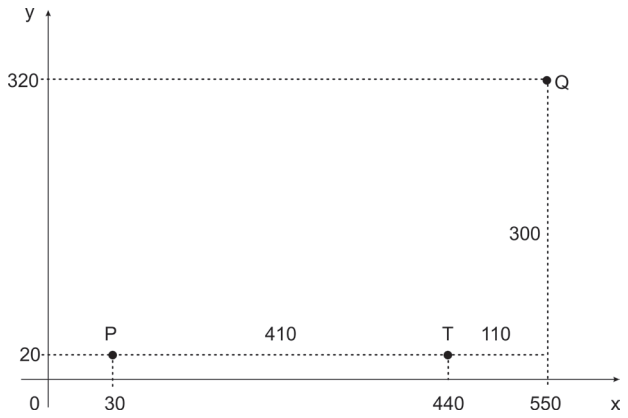
$\frac{1}{}$. (π . 300^2) . 1200 mm^3 ≡ 108 000 000 mm^3

II) Sendo x a altura, em milímetros, do nível de água acumulada em um tanque aberto, em formato de um cubo com 1m^2 de área da base, o índice pluviométrico da região será:

III) x . 1000 . 1000 = 108 000 000 ⇔ x = 108

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO 33



Adotando o sistema de coordenadas ortogonais dado, temos P (30; 20) e Q (550; 320).

A distância percorrida pelo ônibus entre as paradas P e Q, pelo percurso indicado no enunciado, é:

(550 – 30) + (320 – 20) = 820.

O novo ponto T deve ser instalado nesse percurso e a distância percorrida entre os pontos P e T deve ser igual a

$\frac{820}{2}$ = 410, assim, o ponto T é

(30 + 410; 20) = (440; 20)

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO 34

As diferenças, em milímetros, das espessuras das lentes em estoque, com a medida de 3 milímetros, são:

3,10 – 3 = 0,100
3,021 – 3 = 0,021 2,96 – 3 = –0,040
2,099 – 3 = –0,901
3,07 – 3 = 0,070

Logo, a lente com espessura mais próxima de 3 milímetros é a lente com 3,021 milímetros de espessura.

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO 35

I) O número de maneiras de escolher os 7 lugares para as pessoas, entre os 9 disponíveis, é:

$$C_{9,7} = \binom{9}{7} = \frac{9!}{7!2!}$$

II) Para cada maneira da escolha dos lugares, podem-se permutar as 7 pessoas da família, assim, o total de formas de acomodar essa família é:

$$\frac{9!}{7!2!} \cdot 7! = \frac{9!}{2!}$$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO 36

A área ocupada pela nova piscina deve ser menor que a ocupada pela piscina já existente, então:

$$3 \cdot A_{setor} < A_{retângulo} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot \left(\frac{60°}{360°} \pi R^2\right) < 50 \cdot 24 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \frac{1}{6} 3k^2 < 1\,200 \Leftrightarrow R^2 < \frac{1200 \cdot 6}{9} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow R^2 < 1800 \Rightarrow R = 28$, pois R deve ser natural e $28^2 < 1800 < 29^2$.

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO 37

Como a paciente deve tomar 1 copo de água a cada meia hora durante 10 horas, o número de copos de água que ela deve tomar é 2 . 10 = 20. Assim, o volume de água que a paciente vai tomar é

20 . 150 mℓ = 3000 mℓ = 3ℓ e, portanto, ela escolheu a

garrafa IV, pois $\frac{3\ell}{2}$ = 1,5 ℓ.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO 38

Como o felino tem 3,0 kg de massa, sua área corporal é 0,208 m^2.

Como a dosagem diária do medicamento deve ser 250 mg por metro quadrado de superfície corporal, sendo x mg a dose diária que esse felino deverá receber, temos:

$$\frac{x}{250} = \frac{0{,}208}{1} \Leftrightarrow x = 52$$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO 39

A capacidade mínima, em litros, do reservatório a ser construido deve ser

$10 \cdot 20 \cdot 0{,}08\ m^3 = 16\ m^3 = 16\ 000$ litros.

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO 40

Em 20 equipes com 10 atletas, temos um total de 200 atletas, dos quais apenas um havia utilizado subs- tância proibida.

A probabilidade desse atleta ser um dos escolhidos pelo:

Modo I é $P(I) = 3 \cdot \frac{1}{200} \cdot \frac{199}{199} \cdot \frac{198}{198} = \frac{3}{200}$, pois o atleta

Considerado pode ser o primeiro, o segundo ou o ter ceiro a ser sorteado.

Modo II é $P(II) = \frac{1}{20} \cdot 3 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{9} \cdot \frac{8}{8} = \frac{3}{200}$, pois a

probabilidade da equipe do atleta ser sorteada é $\frac{1}{20}$

Modo III é $P(III) = 3 \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{19}{19} \cdot \frac{18}{18} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{10} \cdot \frac{10}{10} =$

$\frac{3}{200}$, pois a equipe dele pode ser a primeira, a segunda ou a terceira a ser sorteada e a probabilidade

dele ser o sorteado na equipe é $\frac{1}{10}$.

Assim, P(I) = P(II) = P(III)

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO 41

O mês de produção máxima ocorre quando o preço é mais baixo, assim, deve-se ter:

$$\cos \frac{\pi x - \pi}{6} = -1\ \pi x - \pi$$

Fazendo $\frac{\pi x - \pi}{6} = \pi$, tem-se:

$\pi x - \pi = 6\pi \Leftrightarrow \pi x = 7\pi \Leftrightarrow x = 7$, que corresponde ao mês de julho.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO 42

Admitindo-se que a carta da mesa é $\frac{6}{8}$, e não $\frac{8}{9}$, segundo as regras do jogo, três cartas da mão desse jogador podem formar um par com a carta da mesa, pois:

$$75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

$$0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} = \frac{6}{8} \text{ e}$$

$$\frac{3}{100} = \frac{6}{4}.$$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO 43

De acordo com o gráfico, o maior número de consu midores das classes A/B que participam de promoções, utilizam a internet, e o maior número de consumidores das classes C/D que participam de promoções, utilizam os correios.

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO 44

O volume da embalagem em centímetros cúbicos é 20 . 10 . 10 = 2000.

Após a mistura sabor chocolate ficar cremosa, os 1000 cm^3 passarão a ocupar 1,25 . 1000 cm^3 =

= 1250 cm^3 e o espaço restante será 2000 cm^3 – 1250 cm^3 = 750 cm^3. Assim, sendo x o volume máximo (em centímetros cúbicos) da mistura sabor morango que deverá ser colocada na embala gem, temos:

$1{,}25 \cdot x = 750 \leftrightarrow x = 600$

RESPOSTA: C

GRUPO NOVA

RESOLUÇÃO 45

A probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20 é $\frac{20}{100}$, pois são 20 números favoráveis entre 100 números possíveis.

RESPOSTA: C